

Série A, n°
N° d'ordre :

743

N° d'ordre
C.N.R.S.
AO 5759

THÈSES

PRESENTEES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LEGRADE..... DE DOCTEURES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

.....Charles SCHMIT.....
.....
.....

1^{re} THESE. — Application du modèle optique à la diffusion π -noyau
au voisinage de la résonance (3/2, 3/2).

2^e THESE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 19 mai 71 devant la Commission d'examen

MM.M. JEAN..... Président.

.....A. MESSIAH.....
.....M. RHO..... } Examineurs.

.....
T.E.O. ERICSON
M. SPIGHEL
Invités

N° d'ordre
C.N.R.S.
40 578

Série A. n°
N° d'ordre
743

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORLÈANS
UNIVERSITÉ DE PARIS

Pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Charles SCHMIT



1. THÈSE — Application du modèle optique à la diffusion lumineuse
au voisinage de la résonance (12,52).

2. THÈSE — Propositions données par la Faculté

Reçues le 12 mai 77 devant la Commission d'examen

MM. M. LEAH Président

Examinateurs
A. MESSIAH
M. ENG

Président
T. G. ERICSON
M. SPICHER

Table des matières

	Page
Introduction	1
I. Dérivation du potentiel optique	3
II. Modèle de Kisslinger	7
III. Théorie de Glauber	
1) Rappels	12
2) Applications	13
IV. Comparaison entre le modèle de Kisslinger et la théorie de Glauber	17
V. Description du noyau	21
VI. Matrice de diffusion Pion-Nucléon	
VI.1 Matrice de diffusion pion-nucléon libre	24
VI.2 Matrice de diffusion pion-nucléon dans la matière nucléaire	25
VI.2.A. Approximation d'impulsion	26
VI.2.B. Correction à l'approximation d'impulsion dans le système du centre de masse π -nucléon	27
VI.2.C. Correction à l'approximation d'impulsion pour la diffusion élastique	29
VI.2.D. Conclusions	33
VII. Calcul du potentiel optique	
VII.1 Premier ordre	34
VII.2 Second ordre	39
VIII. Calculs numériques	
VIII.1 Principe de la méthode	45
VIII.2 Calculs numériques	46
IX. Résultats	50
X. Conclusion	54

Remerciements

C'est au titre d'Attaché de Recherche au C.N.R.S. que j'ai pu mener à bien ce travail.

Monsieur le Professeur M. Jean, après m'avoir accueilli dans la division de Physique Théorique de l'I.P.N. m'a orienté et encouragé avec un intérêt constant. Qu'il veuille trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Monsieur le Professeur F. Becker m'a initié à la physique théorique et ses conseils furent pour moi une aide précieuse. Je l'en remercie vivement.

Je dois beaucoup à Monsieur M. Rho avec lequel j'ai eu de fréquentes discussions. Ses conseils et critiques m'ont beaucoup aidé pour mener à bien ce travail.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur A. Messiah, Messieurs T.E.O. Ericson et Z. Maric de l'intérêt qu'ils ont porté à cette étude. Leurs remarques, critiques et conseils m'ont été d'une grande utilité.

Je tiens aussi à remercier ici Messieurs M. Spieghel et J.P. Stroot, ainsi que le groupe Bruxelles-Orsay du C.E.R.N. pour le climat d'amicale et féconde collaboration qui m'a permis d'apprécier la physique expérimentale. De plus ils ont été pour moi un stimulant efficace.

Que J.P. Dedonder, C. Jacquemin et D.G. Vautherin avec lesquels j'ai beaucoup travaillé soient assurés de mon amicale reconnaissance. Les nombreuses discussions que nous avons eues, tant en physique qu'en analyse numérique m'ont été très profitables.

Je tiens à remercier les membres du Bureau de Calcul de la Division de Physique Théorique pour les conseils qu'ils m'ont donnés lors de l'écriture des programmes. Que Mademoiselle M. Dormeau soit remerciée pour les nombreuses courbes qu'elle eut à tracer. Mes remerciements vont également à Madame F. Beacci pour la patience, le soin et la diligence avec lesquels elle a dactylographié ce manuscrit, ainsi qu'à l'ensemble du service de reproduction.

INTRODUCTION

Depuis longtemps déjà, de nombreux auteurs ont souligné l'intérêt de l'utilisation des pions pour étudier la structure nucléaire, mais il peut être utile de rappeler brièvement les avantages présentés par les mésons π , que nous comparerons aux nucléons, seules particules utilisées présentant des interactions fortes.

1) Tout d'abord la masse des pions est beaucoup plus faible que la masse du nucléon ($\mu / m \approx 1/7$). Donc dans l'étude des réactions π -Noyau, l'approximation statique pourra être utilisée sans commettre d'erreur importante. De plus on peut espérer que le pion, qui ne peut fournir que de faible transfert d'impulsion, excitera préférentiellement des niveaux collectifs.

2) Le pion est un état d'isospin 1. On pourra donc observer des niveaux excités avec $\Delta I = 2$, $\Delta I_z = 0$. On peut aussi effectuer des réactions de simple et double échange de charge qui permettent d'étudier les états analogues des états précédents. Ces dernières réactions devraient permettre aussi une étude plus détaillée des corrélations dans le noyau.

3) Le pion est un boson de spin nul. Ceci entraîne une grande simplification des calculs théoriques, puisque l'on n'a donc pas d'équations couplées ($s = 0$) et puisque les problèmes d'antisymétrisation, qui compliquent beaucoup l'étude des réactions nucléon - noyau, disparaissent (Boson). D'autre part les expériences sont plus aisées, puisqu'il n'y a pas besoin des mesures de polarisation qui sont nécessaires dans le cas de la diffusion nucléon-noyau. De plus des expériences d'absorptions peuvent être effectuées (boson), ce qui devrait permettre la mesure des corrélations nucléaires, puisque cette absorption a lieu principalement sur une paire de nucléons.

4) Le pion est le quantum de l'interaction nucléaire. On peut donc espérer observer une modification de cette interaction en présence d'un pion réel et par la même mieux la connaître.

5) L'interaction π -nucléon est dominée à basse énergie par la résonance ($3/2 \ 3/2$). Dans tout ce domaine on peut donc négliger la contribution des ondes partielles autre que l'onde $3/2$, à l'interaction π -nucléon. De plus l'interaction est alors extrêmement forte si bien que l'on peut espérer mettre en évidence des effets assez faibles.

Après ce tableau des avantages présentés par les pions on peut se demander pourquoi l'étude du noyau au moyen des pions ne s'est développée que lentement et tardivement. Cela tient en partie à la situation expérimentale et en partie aux difficultés théoriques. En effet les faisceaux de pions dont on disposait jusqu'à ces dernières années avaient de faibles intensités, une mauvaise définition en énergie, et une contamination importante en électrons et muons. Tout ceci rendait difficile, voire impossible, des mesures précises de sections efficaces différentielles élastiques et inélastiques. Cependant quelques expériences de diffusions élastiques ont été effectuées à assez basse énergie par Baker et al, Edelstein et al., Miller et al., Fujii. Ces expériences avaient le double défaut d'être d'une précision assez faible et de ne pas couvrir la région de la résonance. Ce n'est que récemment qu'une équipe du C.E.R.N. a effectué des mesures de sections efficaces différentielles élastiques et inélastiques et de sections efficaces totales sur le C_{12} , avec une bonne précision et dans une bande d'énergie couvrant la résonance.

Du point de vue théorique, la médaille a aussi son revers. En effet, au voisinage de la résonance, ainsi que nous l'avons signalé, l'interaction pion-nucléon est extrêmement forte ce qui entraîne que les développements en série des perturbations ne sont que très lentement convergents. D'autre part, dans cette gamme d'énergie, les effets relativistes ne sont certainement plus négligeables, ce qui nous amène au problème suivant : traiter de manière covariante un système de A nucléons et un pion en interaction. Or nous savons que la description des états liés est très difficile dans une théorie relativiste. Nous serons donc amenés à décrire les états nucléaires de manière classique, ce qui suppose implicitement que l'interaction nucléon-nucléon peut être séparée de l'interaction pion-nucléon dont elle dérive, et que la présence d'un pion réel ne modifie pas celle-là. Cela suppose aussi que nous devons calculer les éléments de matrice de l'interaction π -nucléon entre les états habillés et non entre les états nus (modèle de Chew et Low), ou bien que nous devons employer une interaction effective π -nucléon. En pratique d'ailleurs, en raison des difficultés soulevées par l'une ou l'autre de ces deux solutions, nous serons

amenés à utiliser non pas l'interaction élémentaire mais la matrice de transition π -nucléon qui est bien connue, tant sur la couche de masse qu'en dehors de celle-ci (Chew et Low).

Différentes approches peuvent alors être envisagées qui, à l'exception des relations de dispersion, dérivent toutes de la théorie de la diffusion multiple :

1) "Approximation d'impulsion" : Dans ces calculs, on néglige l'influence des diffusions multiples du pion dans le noyau, ce qui revient à utiliser l'approximation de Born pour le calcul de l'amplitude de diffusion par le potentiel optique. En raison de la forte interaction π -nucléon cette approximation est très mauvaise, en particulier au voisinage de la résonance.

2) Théorie de Glauber : Comme nous le verrons, cette théorie a été appliquée avec succès à l'analyse de la diffusion élastique $\pi - {}^{12}\text{C}$ au voisinage de la résonance. Cependant les conclusions que l'on peut tirer d'un tel modèle sont assez douteuses, en raison des approximations utilisées et il paraît difficile de supprimer ces approximations sans que ce modèle perde de sa simplicité.

3) Relations de dispersion : Comme l'ont montré T.E.O. Ericson et M.P. Locher la technique des relations de dispersion semble applicable à la description de l'interaction d'une particule avec un noyau. Mais la complexité de la structure nucléaire rend seule possible l'application des relations de dispersion vers l'avant, ce qui ne fournit des informations que sur la partie réelle de l'amplitude de diffusion π -Noyau à 0° .

4) Modèle optique : Les premières analyses, semi-phénoménologiques, furent effectuées à l'aide d'un potentiel optique local qui se révéla incapable de rendre compte des distributions angulaires à grand angle. Cette difficulté fut surmontée par L.S. Kisslinger qui montra que, pour des énergies du pion variant de 60 Mev à 100 Mev, le potentiel optique π -Noyau doit comporter une partie non-locale, reliée à l'amplitude de diffusion π -nucléon en onde P.

M. Ericson et T.E.O. Ericson, utilisant la méthode de Lax pour le traitement de la diffusion multiple dans les milieux classiques, aboutissent essentiellement au même modèle en y incluant toutefois l'effet des corrélations dans le noyau et l'effet de l'absorption d'un pion par une paire de nucléons. Ce modèle a été appliqué avec succès aussi bien aux atomes π -mésiques qu'aux diffusions élastiques jusqu'à la résonance (3/2, 3/2). Cependant l'importance des approximations faites dans la dérivation de ce potentiel optique rend douteuses les informations que l'on peut en tirer aussi bien sur l'interaction pion-Noyau que sur la structure nucléaire. C'est pourquoi il nous a paru nécessaire d'effectuer un calcul plus précis du potentiel optique π -Noyau que nous allons présenter maintenant.

Dans une première partie, nous rappelons brièvement la théorie de la diffusion multiple de Watson et les hypothèses qu'elle implique (ch. I), puis nous étudions deux modèles simples qui en dérivent : le modèle de Kisslinger (ch. II) et la théorie de Glauber (ch. III). Enfin dans le chapitre IV nous comparons les approximations introduites dans ces deux modèles.

Dans la deuxième partie, nous présentons un calcul plus précis du potentiel optique pion-noyau au voisinage de la résonance (3/2, 3/2). Le chapitre V est consacré à la description du noyau. Puis dans le chapitre VI, nous étudions la matrice de diffusion pion-nucléon libre et les effets de l'interaction nucléon-nucléon sur la matrice de diffusion pion-nucléon dans la matière nucléaire. Le calcul du potentiel optique aux 1er et 2ème ordres est présenté dans le chapitre VII, et les méthodes numériques utilisées, dans le chapitre VIII. Les résultats obtenus avec ce modèle et les conclusions sont présentés dans les chapitres IX et X.

I - DERIVATION DU POTENTIEL OPTIQUE

Dans ce chapitre nous rappelons brièvement la théorie de diffusion multiple de Watson, qui nous permet de relier l'amplitude de diffusion particule-noyau aux amplitudes de diffusion particule-nucléon. De plus, dans le cadre de cette théorie, nous verrons que le problème de la diffusion élastique d'une particule sur un noyau se ramène au problème beaucoup plus simple de la diffusion par un potentiel. Rappelons toutefois que cette dérivation se fait dans le cadre de la mécanique quantique classique (non-relativiste). Ceci suppose que l'interaction particule-nucléon dérive d'un potentiel. D'autre part cette théorie n'est applicable que dans le cas où il n'existe pas de force à plus de 2 corps.

Avec ces hypothèses le Hamiltonien du problème s'écrit :

$$H = H_A + K + \sum_{i=1}^A v_i$$

où H_A est le Hamiltonien nucléaire :

$$H_A = \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j} U_{ij}$$

K est le Hamiltonien libre de la particule incidente

$$K = \frac{k^2}{2\mu}$$

v_i est l'interaction entre le nucléon i et la particule incidente.

Dans ces conditions la matrice de diffusion particule-noyau $M(E)$ satisfait à l'équation intégrale suivante

$$M(E) = \sum_{i=1}^A v_i [1 + G_o^+(E) M(E)]$$

où l'on a posé

$$G_o^+(E) = [E + i\epsilon - H_o]^{-1}$$

$$H_o = H_A + K$$

Pour introduire la matrice de diffusion particule-nucléon, nous allons développer en série cette équation intégrale, et regrouper les termes qui correspondent à des interactions successives sur le même nucléon.

Note : Dans tout ce chapitre nous supposons que la particule incidente est discernable des nucléons, quoique cette théorie s'applique à la diffusion nucléon-noyau avec quelques modifications.

$$\begin{aligned}
M(E) &= \sum_i v_i + \sum_{i,j} v_i G_o^+(E) v_j + \sum_{i,j,k} v_i G_o^+(E) v_j G_o^+(E) v_k + \dots \\
&= \sum_i (v_i + v_i G_o^+(E) v_i + v_i G_o^+(E) v_i G_o^+(E) v_i + \dots) \\
&\quad + \sum_{i \neq j} (v_i + v_i G_o^+(E) v_i + \dots) G_o^+(E) (v_j + v_j G_o^+(E) v_j + \dots) \\
&\quad + \sum_{i \neq j \neq k} (v_i + \dots) G_o^+(E) (v_j + \dots) G_o^+(E) (v_k + \dots) \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

On introduit l'opérateur $t_i(E)$ qui satisfait à l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
t_i(E) &= v_i + v_i G_o^+(E) t_i(E) \\
&= v_i + v_i G_o^+(E) v_i + v_i G_o^+(E) v_i G_o^+(E) v_i + \dots
\end{aligned}$$

et que l'on peut appeler matrice de transition particule-nucléon dans la matière nucléaire par analogie avec la matrice de diffusion particule-nucléon libre $\tau_i(E)$ qui satisfait à une équation intégrale de même type :

$$\begin{aligned}
\tau_i(E) &= v_i + v_i g_o^+(E) \tau_i(E) \\
\text{avec} \quad g_o^+(E) &= \left[E + i\epsilon - \frac{p_i^2}{2m} - K \right]^{-1}
\end{aligned}$$

Avec cette définition nous obtenons alors :

$$M(E) = \sum_i t_i(E) + \sum_{i \neq j} t_i(E) G_o^+(E) t_j(E) + \dots$$

A ce point nous allons nous limiter à la seule diffusion élastique. Nous allons donc calculer les éléments de matrice de $M(E)$ entre les états fondamentaux.

$$\langle 0 | M(E) | 0 \rangle = \langle 0 | \sum_i t_i(E) | 0 \rangle + \sum_n \langle 0 | \sum_i t_i(E) | n \rangle G_o^+(E - E_n) \langle n | \sum_{j \neq i} t_j(E) | 0 \rangle + \dots$$

$$\text{avec} \quad G_o^+(E - E_n) = \langle n | G_o^+(E) | n \rangle$$

Pour plus de commodité nous supposerons que les fonctions d'ondes nucléaires sont complètement antisymétrisées. Dans ces conditions, si l'opérateur $t_i(E)$, qui est un opérateur à $A+1$ corps, est diagonal par rapport à tous les nucléons sauf le nucléon i , et seulement dans ce cas, nous obtenons

$$\langle 0 | M(E) | 0 \rangle = A \langle 0 | t(E) | 0 \rangle + A(A-1) \sum_n \langle 0 | t(E) | n \rangle G_o^+(E - E_n) \langle n | t(E) | 0 \rangle + \dots$$

En introduisant Π_0 , le projecteur sur l'état fondamental, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle 0 | M(E) | 0 \rangle &= A \langle 0 | t(E) | 0 \rangle + A(A-1) \langle 0 | t(E) | 0 \rangle G_0^+(E) \langle 0 | t(E) | 0 \rangle + \dots \\ &+ A(A-1) \langle 0 | t(E) (1-\Pi_0) G_0^+(E) t(E) | 0 \rangle + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

L'opérateur $T(E) = \frac{A-1}{A} \langle 0 | M(E) | 0 \rangle$, qui ne dépend plus que des coordonnées relatives particule-noyau et non des coordonnées relatives particule-nucléon, s'écrit alors :

$$\begin{aligned} T(E) &= (A-1) \langle 0 | t(E) | 0 \rangle + (A-1)^2 \langle 0 | t(E) | 0 \rangle G_0^+(E) \langle 0 | t(E) | 0 \rangle + \dots \\ &+ (A-1)^2 \langle 0 | t(E) (1-\Pi_0) G_0^+(E) t(E) | 0 \rangle + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

On voit facilement en identifiant les développements, qu'il satisfait à l'équation intégrale suivante :

$$T(E) = U [1 + G_0^+(E) T(E)]$$

avec

$$\begin{aligned} U &= (A-1) \langle 0 | t(E) | 0 \rangle + (A-1)^2 \langle 0 | t(E) (1-\Pi_0) G_0^+(E) t(E) | 0 \rangle + \dots \\ &= (A-1) \langle 0 | t(E) \frac{1}{1-(A-1)(1-\Pi_0) G_0^+(E) t(E)} | 0 \rangle \end{aligned}$$

Nous avons donc partiellement atteint notre but, qui était de relier l'amplitude de diffusion particule-noyau à l'amplitude de diffusion particule-nucléon. Nous avons même été plus loin puisque nous avons montré que la diffusion élastique se ramène à la diffusion par un potentiel que l'on peut construire à partir des fonctions d'onde nucléaires et de l'opérateur $t_i(E)$. Cependant il convient de relier l'amplitude de diffusion particule-nucléon dans la matière nucléaire à l'amplitude de diffusion pour les particules libres. Pour cela revenons à la définition des opérateurs $t_i(E)$ et $\tau_i(E)$:

$$t_i = v_i + v_i G_0^+(E) t_i$$

$$\tau_i = v_i + v_i g_0^+(E) \tau_i$$

Dans la suite, afin d'alléger l'écriture, nous omettrons la dépendance en E . En utilisant les relations bien connues :

$$\begin{aligned} g_0^+ \tau_i &= g^+ v_i \\ \tau_i g_0^+ &= v_i g^+ \end{aligned} \quad \text{avec} \quad g^+ = \left[E + i\epsilon - \frac{p^2}{2m} - K - v_i \right]^{-1}$$

$$\begin{aligned} G_0^+ t_i &= G^+ v_i \\ t_i G_0^+ &= v_i G^+ \end{aligned} \quad \text{avec} \quad G^+ = \left[E + i\epsilon - H_A - K - v_i \right]^{-1}$$

et la relation opératorielle :

$$\frac{1}{a - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} b \frac{1}{a - b}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} t_i &= v_i + v_i G^+ v_i \\ &= v_i + v_i g^+ v_i + v_i g^+ \left(H_A - \frac{p_i^2}{2m} \right) G^+ v_i \\ t_i &= \tau_i + \tau_i g_o^+ \left(H_A - \frac{p_i^2}{2m} \right) G_o^+ t_i \end{aligned}$$

Ainsi le but que nous nous étions fixés est-il atteint. Avec les hypothèses faites

- 1) Mécanique quantique classique
- 2) Forces à deux corps
- 3) Opérateur t_i est un opérateur à 2 corps.

la connaissance des fonctions d'onde nucléaires et de la matrice de transition particule-nucléon libre suffit pour calculer la diffusion particule-noyau. De plus ce problème se ramène au problème simple de la diffusion d'une particule par un potentiel.

Avant de passer aux applications de cette théorie, on doit toutefois remarquer que les hypothèses précédentes ne sont probablement pas vérifiées dans le cas de la diffusion pion-noyau au voisinage de la résonance. En effet, il n'est pas certain que l'interaction π -nucléon dérive d'un potentiel, ni même qu'il existe un potentiel reproduisant la diffusion π -nucléon sur et hors couche de masse. D'autre part, il est clair que les phénomènes d'absorption du pion par un ou deux nucléons dans le noyau sont complètement ignorés par cette théorie, alors qu'ils correspondent à des processus physiques qui, sans être importants, ne sont pas négligeables. De plus cette théorie implique que l'interaction nucléon-nucléon peut être séparée de l'interaction pion-nucléon l'hypothèse dont la justification est délicate. Enfin, l'inclusion de la cinématique relativiste dans ce formalisme pose quelques problèmes.

II - MODELE DE KISSLINGER

Dans ce chapitre nous allons voir une application du modèle optique dérivé précédemment au cas de la diffusion pion noyau.

A l'origine le modèle de Kisslinger, qui est une forme analytique simple du potentiel optique, fut dérivé pour décrire la diffusion élastique π -noyau à basse énergie ($T_\pi < 100$ Mev) mais il a été utilisé jusqu'au voisinage de la résonance (3/2, 3/2).

A partir de la théorie du modèle optique, les approximations suivantes sont nécessaires pour obtenir le potentiel de Kisslinger.

1) Approximation de diffusion cohérente : dans le calcul du potentiel optique

$$U = (A-1) \langle 0 | t(E) | 0 \rangle + (A-1)^2 \langle 0 | t(E)(1-\Pi_0) G_0^+(E) t(E) | 0 \rangle + \dots$$

on néglige les excitations intermédiaires du noyau ; cette approximation est sans doute assez bonne puisque le deuxième terme du potentiel optique serait nul en l'absence de corrélation.

2) Approximation à un grand nombre de nucléons : dans l'équation intégrale satisfaite par $\frac{A-1}{A} \langle 0 | M(E) | 0 \rangle$, on néglige les termes en $1/A$

$$\frac{A-1}{A} \langle 0 | M(E) | 0 \rangle = (A-1) \langle 0 | t(E) | 0 \rangle \left[1 + G_0^+(E) \frac{A-1}{A} \langle 0 | M(E) | 0 \rangle \right]$$

$$\langle 0 | M(E) | 0 \rangle \approx A \langle 0 | t(E) | 0 \rangle [1 + G_0^+(E) \langle 0 | M(E) | 0 \rangle]$$

3) Approximation d'impulsion : dans l'équation intégrale vérifiée par t_i

$$t_i = \tau_i + \tau_i g_0^+ \left[H_A - \frac{p_i^2}{2m} \right] G_0^+ t_i$$

on néglige la deuxième partie, c'est à dire que l'on suppose que la diffusion π -nucléon n'est pas modifiée dans la matière nucléaire. La validité de cette approximation est assez incertaine mais elle s'applique sûrement à haute énergie dès que l'on peut négliger l'effet du principe de Pauli et les énergies de liaison des nucléons dans le noyau.

Par contre, Goldberger et Watson ont montré que, au voisinage de la résonance, l'interaction π -nucléon est tellement forte que l'erreur commise en faisant l'approximation d'impulsion pouvait être du même ordre de grandeur que la matrice τ π -nucléon libre.

4) Approximation statique : dans le calcul des éléments de matrice du potentiel, on néglige, d'une part, le recul du noyau et, d'autre part, le mouvement de Fermi.

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_f | U | \vec{q}_i \rangle &= A \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \dots d\vec{k}_A \psi_0^* (\vec{k}_1 + \vec{q}_i - \vec{q}_f, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_A) \psi_0 (\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_A) \\ &\quad \langle \vec{k}_1 + \vec{q}_i - \vec{q}_f, \vec{q}_f | \tau(E) | \vec{q}_i, \vec{k}_1 \rangle \end{aligned}$$

$$\approx A \langle \vec{q}_i - \vec{q}_f, \vec{q}_f | \tau(E) | \vec{q}_i, \vec{0} \rangle \quad \rho (\vec{q}_i - \vec{q}_f)$$

$$\text{où} \quad \rho (\vec{q}_i - \vec{q}_f) = \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \dots d\vec{k}_A \psi_0^* (\vec{k}_1 + \vec{q}_i - \vec{q}_f, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_A) \psi_0 (\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_A)$$

Or on sait que l'on peut tenir compte du mouvement du centre de masse du noyau par un

$$+ (\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2 \frac{\langle r^2 \rangle}{6A} \approx$$

facteur multiplicatif de la forme e . Pour un noyau assez lourd ou à basse énergie il est facile de voir que cette correction est faible. Quant au mouvement de Fermi, l'approximation faite revient à remplacer le moment relatif dans le centre de masse π -nucléon :

$$\vec{p}_i \approx \frac{m \vec{q}_i - \mu \vec{k}_1}{m + \mu}, \quad \vec{p}_f \approx \frac{m \vec{q}_f - \mu (\vec{k}_1 + \vec{q}_i - \vec{q}_f)}{m + \mu}$$

par $\vec{p}_i \sim \frac{m}{m + \mu} \vec{q}_i$ et $\vec{p}_f = \vec{q}_f - \frac{\mu}{m + \mu} \vec{q}_i$

L'erreur commise est donc de l'ordre de :

$$\eta = \frac{\mu}{m} \frac{k_F}{q_i}$$

Dès que le moment du pion est de l'ordre du moment de Fermi $k_F = 220 \text{ Mev}/c$, cette erreur est donc de l'ordre de μ/m soit 15%. Cette expression est donc valable pour le calcul des éléments de matrice du potentiel à moyenne énergie. Cependant à basse énergie, et même à moyenne énergie pour les éléments de matrice hors de la couche de masse, cette approximation peut être assez mauvaise.

5) Forme de la matrice de diffusion π -nucléon. A très basse énergie, on peut décrire l'interaction π -nucléon avec des formules de portée effective, en se limitant aux ondes S et P. L'amplitude π -nucléon s'écrit alors :

$$f_{CM}(\vec{k}, \vec{k}') = - \left[a_1 T_{1/2} + a_3 T_{3/2} + (a_{33} T_{3/2} + a_{31} T_{1/2}) P_{3/2} + (a_{13} T_{3/2} + a_{11} T_{1/2}) P_{1/2} \right]$$

pour $|\vec{k}| = |\vec{k}'| = \sqrt{E_{CM}^2 - \mu^2}$

où a_{2T} est la longueur de diffusion en onde S pour un état d'isospin T, $a_{2T, 2J}$ le volume de diffusion en onde P pour un état d'isospin T et de moment cinétique J. $T_{1/2}$ et $T_{3/2}$ sont les projecteurs sur les états d'isospin 1/2 et 3/2. $P_{1/2}$ et $P_{3/2}$ sont les projecteurs sur les états de moment angulaire 1/2 et 3/2.

$$P_{3/2} = [2 \vec{k} \cdot \vec{k}' - i \vec{\sigma} \cdot (\vec{k}' \wedge \vec{k})]$$

$$P_{1/2} = [\vec{k} \cdot \vec{k}' + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{k}' \wedge \vec{k})]$$

Cette forme analytique de l'amplitude, valable à basse énergie, est étendue à plus haute énergie en remplaçant les longueurs et volumes de diffusion par leur expression en fonction des déphasages

$$- a_{2T} \longrightarrow \alpha_{2T} = \frac{e^{2i \delta_{2T}(E_{CM})} - 1}{2 i k}$$

* Transformation de Gartenhaus-Schwartz (Phys. Rev. 108, 482 (1957))

$$- a_{2T,2J} \longrightarrow \alpha_{2T,2J} = \frac{e^{2i \delta_{2T,2J}(E_{CM})} - 1}{2 i k^3}$$

Dans ce remplacement, on utilise les déphasages à l'énergie E_{CM} , énergie incidente du pion, qui ne dépend ni de $\vec{k}$ ni de $\vec{k}'$ **. Dans ces conditions la matrice de diffusion π -nucléon s'écrit :

$$\langle \vec{k} - \vec{k}', \vec{k}' | \tau(E_L) | \vec{k}, \vec{0} \rangle = - \frac{2\pi}{E_L} f^{Lab} [E_L, \vec{k}, \vec{k}']$$

$$** \quad = \lambda + \mu \vec{k} \cdot \vec{k}' + i \nu \vec{\sigma} \cdot (\vec{k}' \wedge \vec{k})$$

Il est clair que cette expression est très approximative. En effet, pour les éléments de matrice sur la couche de masse, la cinématique utilisée n'est valable que pour les petits angles et à la limite $\frac{\mu}{m} \ll 1$. Pour les éléments de matrice hors couche, le passage du

système du laboratoire au système du centre de masse π -nucléon n'est pas clairement défini, et il semble qu'une transformation correcte entraînerait une dépendance des paramètres λ , μ et ν en $\vec{k}$ et $\vec{k}'$. De plus on peut se demander si ce prolongement hors couche de masse de la matrice de transition pion-nucléon est valable en dehors du domaine des très basses énergies.

Avec ces approximations l'élément de matrice du potentiel s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_f t | U(E_L) | t \vec{q}_i \rangle = A \sum_{\substack{i_1 i_2 \\ s_1 s_2}} \{ \langle i_1 t | \lambda | i_2 \rangle \delta_{s_1 s_2} + \langle i_1 t | \mu | i_2 \rangle \delta_{s_1 s_2} \vec{q}_i \cdot \vec{q}_f \\ + i \langle i_1 t | \nu | i_2 \rangle \langle s_1 | \vec{\sigma} | s_2 \rangle \cdot \vec{q}_f \wedge \vec{q}_i \} \int d\vec{k}_1 \rho(\vec{k}_1 + \vec{q}_i - \vec{q}_f, s_1 i_1, \vec{k}_1 s_2 i_2) \end{aligned}$$

* Pour passer du système du centre de masse π -N au système du Laboratoire on utilise la transformation valable à 0° :

$$f^{Lab} [E_L, \vec{k}, \vec{k}'] = \frac{k_L}{k_{CM}} f^{CM} [E_{CM}, \vec{k}, \vec{k}']$$

où k_L (resp. k_{CM}) est le moment d'un pion d'énergie E_L (resp. E_{CM})

$$** \quad \lambda = - \frac{2\pi}{E_L} \frac{k_L}{k_{CM}} [\alpha_3 T_{3/2} + \alpha_1 T_{1/2}]$$

$$\mu = - \quad " \quad [(2\alpha_{33} + \alpha_{13}) T_{3/2} + (2\alpha_{31} + \alpha_{11}) T_{1/2}]$$

$$\nu = - \quad " \quad [(\alpha_{13} - \alpha_{33}) T_{3/2} + (\alpha_{11} - \alpha_{31}) T_{1/2}]$$

où s désigne le spin du nucléon, i son isospin et t celui du pion. Si l'on considère la diffusion élastique de π^- sur un noyau de spin nul, la densité est diagonale en spin et isospin et les termes de spin-flip disparaissent ; le potentiel s'écrit :

$$\langle \vec{q}_f | U(E_L) | \vec{q}_i \rangle = (a + b \vec{q}_i \cdot \vec{q}_f) \rho(\vec{q}_i - \vec{q}_f)$$

avec

$$a = - \frac{2\pi}{E_L} \frac{k_{Lab}}{k_{CM}} \cdot \frac{1}{3} [(3A - 2Z) \alpha_3 + 2Z \alpha_1]$$

$$b = - \frac{2\pi}{E_L} \frac{k_{Lab}}{k_{CM}} \cdot \frac{1}{3} [(3A - 2Z) (2\alpha_{33} + \alpha_{13}) + 2Z (2\alpha_{31} + \alpha_{11})]$$

et où $\rho(k)$ est le facteur de forme nucléaire. Avec l'hypothèse faite précédemment, à savoir que les coefficients a et b ne dépendent pas de $\vec{q}_i$ ou $\vec{q}_f$, la transformée de Fourier de ce potentiel se calcule aisément. On obtient ainsi le potentiel en représentation coordonnées :

$$\langle \vec{r} | V_N(E_L) | \Psi \rangle = a \rho(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) - b \vec{\nabla} \cdot (\rho(\vec{r}) \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}))$$

Ce modèle diffère beaucoup des potentiels phénoménologiques utilisés qui sont en général locaux. Le terme non local qui est relié à l'amplitude de diffusion π -N en onde P devient prépondérant au voisinage de la résonance. Il se compose d'un terme de masse effective : $b \rho(r) \Delta \Psi(r)$ et d'un terme de surface $b (\vec{\nabla} \rho(r)) \cdot (\vec{\nabla} \Psi(r))$. Ceci conduit à penser que le pion est un bon moyen d'étudier la surface nucléaire. Cependant, pour utiliser un tel potentiel, il faut l'introduire dans une équation d'onde. Ce point pose quelques problèmes puisque la notion de potentiel n'est pas covariante. Cette difficulté est résolue (?) en considérant que le potentiel obtenu est la 4ème composante d'un "quadrivecteur potentiel" (analogie avec l'électromagnétisme) et l'équation d'onde de Klein-Gordon s'écrit alors :

$$(-\Delta + \mu^2) \Psi(\vec{r}) = (E - V_C - V_N)^2 \Psi(\vec{r})$$

ou

$$(-\Delta + \mu^2) \Psi(\vec{r}) = [(E - V_C)^2 - 2(E - V_C) V_N + V_N^2] \Psi(\vec{r})$$

Comme le terme en V_N^2 est quelque peu gênant, on suppose que l'on peut le négliger ($V_N \ll E$), de même que l'on néglige le potentiel coulombien dans le terme croisé : $2(E - V_C(r)) V_N$. Avec ces approximations le problème se ramène à la résolution de l'équation de Schrödinger dans laquelle on aurait remplacé la masse par l'énergie.

$$[\Delta + k^2 - U(\vec{r})] \Psi(\vec{r}) = 0$$

$$U(\vec{r}) = 2 E V_C(\vec{r}) - V_C^2(\vec{r}) + 2 E V_N(r)$$

Tel est le modèle connu sous le nom de Modèle de Kisslinger. Il faut aussi signaler le modèle plus élaboré dérivé par M. Ericson et T.E.O. Ericson, dans lequel les auteurs tiennent compte de l'absorption sur une paire de nucléon, et d'effets du second ordre, et mettent ainsi en évidence l'analogie de l'effet Lorentz-Lorenz en électromagnétisme. En première approximation, toutefois, ces deux modèles sont identiques et, dans les applications que nous allons voir maintenant, nous ne ferons pas de distinction entre eux.

Résultats

Dès que des expériences de diffusion élastiques π -noyau furent possibles, de nombreux auteurs ont tenté d'interpréter les résultats à l'aide du modèle optique qui semblait un outil bien adapté à ce problème.

Les premières tentatives, effectuées avec des potentiels optiques locaux, furent très décevantes. Par contre l'utilisation du modèle de Kisslinger fut fructueuse à basse énergie : les prévisions théoriques de distributions angulaires étaient voisines des courbes expérimentales et, en considérant a et b comme des paramètres libres, un bon accord pouvait être obtenu par minimisation entre l'expérience et la théorie. De plus, les paramètres optimaux restaient voisins des prévisions théoriques.

En ce qui concerne les expériences de diffusion élastique $\pi - C^{12}$ au voisinage de la résonance, l'analyse des résultats au moyen du modèle de Kisslinger a été effectuée par plusieurs auteurs : C. Schmit, avec une densité carrée, en optimisant sur les paramètres a , b et la portée du puits ; J. Gøerres qui utilise une densité plus réaliste et optimise tous les paramètres ; Krell and Barmø utilisent une densité de type Saxon-Wood et optimisent le paramètre b . M.M. Sternheim et E.H. Auerbach, d'une part, et J.P. Maillet et C. Schmit d'autre part, qui utilisent une densité réaliste (Saxon-Wood ou Gaussienne modifiée), traitent le coulombien de manière correcte, et comparent les prédictions théoriques, et les meilleurs fits aux résultats expérimentaux. Les résultats présentés sur les figures G2 et G3 sont ceux obtenus par J.P. Maillet, avec l'ensemble de paramètres présenté dans la table I. Ces valeurs ont été obtenues par minimisation des paramètres a , b et r (rayon-moyen carré de la densité) dans la limite de leurs barres d'erreurs. La conclusion la plus frappante de ces travaux est que l'accord entre les prédictions théoriques du modèle de Kisslinger et les résultats expérimentaux est bien meilleur que dans le cas du modèle optique simple. L'allure générale des distributions angulaires est bien rendue (positions du premier creux et du premier maximum et même du second creux correctes) et l'accord quantitatif est très satisfaisant. Par contre l'optimisation des paramètres, sans aucune contrainte, conduit à des valeurs très différentes des valeurs théoriques pour une amélioration assez faible de l'accord avec les résultats expérimentaux. De plus il semble nécessaire de faire varier la forme de la densité, en particulier le rayon moyen carré, dans des limites très grandes pour obtenir un fit ayant un poids statistique correct. Dans ces conditions il semble que l'on puisse dire que le modèle de Kisslinger décrit grossièrement la réalité, mais qu'il est incapable à lui seul de l'expliquer entièrement. Compte tenu des approximations faites dans la dérivation de ce modèle, ce résultat est déjà étonnant et justifierait une étude plus approfondie du problème. Avant d'aborder ce point, il peut cependant être utile de comparer ces résultats à ceux d'un autre modèle simple : la théorie de Glauber. Certes cette dernière n'est valable que pour les problèmes de hautes énergies, mais de même que nous avons extrapolé le modèle de Kisslinger jusqu'à la résonance $(3/2, 3/2)$, il peut être intéressant d'extrapoler vers les basses énergies la théorie de Glauber, que l'on peut d'ailleurs dériver dans le même formalisme.

Table I : Paramètres du modèle de Kisslinger

Energie (Mev)	Paramètres théoriques en fm ³				Paramètres optimaux en fm ³				Rayon moyen carré en fm
	Re a	Im a	Re b	Im b	Re a	Im a	Re b	Im b	
120	-1.11 ± .33	.44 ± .10	7.95 ± .23	5.26 ± .20	-.78	.34	8.18	5.06	2.22
150	-.82 ± .22	.37 ± .10	5.40 ± .30	8.38 ± .20	-.60	.47	5.70	8.58	2.20
180	-.75 ± .20	.33 ± .07	2.20 ± .50	8.40 ± .40	-.95	.40	2.70	8.80	2.23
200	-.65 ± .17	.32 ± .06	.25 ± .35	7.35 ± .45	-.77	.38	.60	7.80	2.30
230	-.54 ± .10	.28 ± .05	-2.30 ± .20	5.05 ± .15	-.44	.23	-2.10	4.90	2.34
260	-.44 ± .06	.28 ± .05	-2.35 ± .10	3.20 ± .10	-.38	.23	-2.25	3.10	2.26
280	-.40 ± .04	.29 ± .04	-2.05 ± .10	2.55 ± .10	-.44	.33	-2.08	2.65	2.34

Les valeurs théoriques des paramètres a et b sont obtenues à l'aide des déphasages de Donnachie , dans Particle Interaction at High Energies, ed. by T.W. Priest and L.L.J. Wick, Oliver and Boyd, Edimburg 1967, p. 330. Quant au rayon du C₁₂, r=2.30±0.1fm, il est tiré de H.R. Collard et R. Hofstadter, Nuclear Radii from electron scattering in Landolt-Börnstein, Numerical Data and Functional Relationship in Science and Technology, Group I, Vol. 2, Springer Verlag (1967).

III - THEORIE DE GLAUBER

III.1 Rappels

La théorie de Glauber fut dérivée pour décrire les collisions à haute énergie : elle suppose en particulier qu'une description semi-classique s'applique aussi bien à la diffusion pion-nucléon qu'à la diffusion pion-noyau.

Elle suppose aussi que les distributions angulaires de diffusion sont fortement piquées vers l'avant de telle sorte que le moment de transfert soit toujours dans un plan perpendiculaire à la direction de la particule incidente. Avec ces approximations l'amplitude de diffusion pion-nucléon s'écrit :

$$f(\vec{q}) = \frac{k}{2i\pi} \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} (e^{2i\chi(\vec{b})} - 1) d^2 \vec{b}$$

où k est le moment du pion, $\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$ son moment de transfert et $\vec{b}$ son paramètre d'impact.

La fonction $\chi(b)$ ainsi définie remplace les déphasages habituels auxquels elle est reliée par :

$$\chi(\vec{b}) \sim \delta_l \quad kb = l + \frac{1}{2}$$

et elle est reliée à l'amplitude par la transformation inverse :

$$\Gamma(\vec{b}) = e^{2i\chi(\vec{b})} - 1 = \frac{i}{2\pi k} \int f(\vec{q}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} d^2 \vec{q}$$

La deuxième hypothèse de cette théorie est l'additivité des déphasages : étant donnés A nucléons de coordonnées (x_i, y_i) où $\vec{s}_i$ est dans le plan perpendiculaire à la direction incidente du pion, Glauber suppose que le déphasage d'un pion ayant un paramètre d'impact $\vec{b}$ est la somme des déphasages causés par chaque nucléon :

$$\chi_T(\vec{b}) = \sum_{i=1}^A \chi(\vec{b} - \vec{s}_i)$$

Cette hypothèse entraîne implicitement plusieurs approximations :

1) Approximation d'impulsion : le déphasage causé par un nucléon est le même que si ce nucléon était isolé.

2) On suppose que le pion se propage sur sa couche de masse, ou que les effets hors couche de masse sont faibles.

3) Approximation statique : on calcule le déphasage causé par un nucléon comme si ce nucléon était au repos dans le laboratoire.

On doit noter qu'à haute énergie ces approximations sont certainement valables mais que, dans le domaine qui nous intéresse, leur validité est douteuse.

Avec cette hypothèse, la fonction de profil du noyau $\Gamma_T(b)$ se calcule aisément :

Note : Dans toute cette partie nous ne tiendrons pas compte du spin ni de l'isospin des nucléons et du projectile que nous appellerons pion. L'écriture s'en trouvera allégée sans que le problème perde de sa généralité.

$$\begin{aligned}
1 + \Gamma_T(\vec{b}) &= e^{2i\chi_T(\vec{b})} \\
&= \int \left[\prod_{i=1}^A dx_i d\vec{s}_i e^{2i\chi(\vec{b}-\vec{s}_i)} \right] \Psi_0^*(x_i, \vec{s}_i) \Psi_0(x_i, \vec{s}_i)
\end{aligned}$$

et l'amplitude de diffusion élastique π -noyau s'en déduit immédiatement :

$$F(\vec{q}) = \frac{k}{2i\pi} \int d^2\vec{b} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \Gamma_T(\vec{b})$$

III.2 Applications

Dans les applications que nous allons voir nous ferons l'approximation qui consiste à négliger les corrélations dans le noyau. Alors l'amplitude de diffusion π -Noyau s'exprime facilement à l'aide de l'amplitude π -nucléon et il nous sera plus facile de comparer du point de vue théorique le modèle de Kisslinger et le modèle de Glauber. Reprenons donc l'expression de la fonction de profil du noyau.

$$\begin{aligned}
1 + \Gamma_T(\vec{b}) &= \int \prod_{i=1}^A dx_i d\vec{s}_i e^{2i\chi(\vec{b}-\vec{s}_i)} \Psi_0^*(x_i, \vec{s}_i) \Psi_0(x_i, \vec{s}_i) \\
&= \int \left\{ \prod_{i=1}^A dx_i d\vec{s}_i \left[1 + \frac{i}{2\pi k} \int f(\vec{q}_i) e^{-i\vec{q}_i \cdot (\vec{b}-\vec{s}_i)} d^2q_i \right] \right\} \Psi_0^*(x_1, \vec{s}_1, \dots, x_A, \vec{s}_A) \Psi_0(x_1, \vec{s}_1, \dots) \\
&= \int \prod_{i=1}^A dx_i d\vec{s}_i \left[1 + \sum_{j=1}^A I_j(\vec{b}-\vec{s}_j) + \sum_{j \neq k} I_j(\vec{b}-\vec{s}_j) I_k(\vec{b}-\vec{s}_k) + \dots \right] \Psi_0^*(x_1, \vec{s}_1, \dots) \Psi_0(x_1, \vec{s}_1, \dots)
\end{aligned}$$

avec
$$I_j(\vec{b}-\vec{s}_j) = \frac{i}{2\pi k} \int f(\vec{q}_j) e^{-i\vec{q}_j \cdot (\vec{b}-\vec{s}_j)} d^2q_j$$

On voit donc apparaître des termes dépendant des densités à 1, 2, ..., A particules, puisque l'on peut écrire :

$$\Gamma_T(\vec{b}) = \Gamma_I(\vec{b}) + \Gamma_{II}(\vec{b}) + \dots + \Gamma_A(\vec{b})$$

avec

$$\Gamma_n(\vec{b}) = C_A^n \int \left\{ \prod_{i=1}^n dx_i d\vec{s}_i I_i(\vec{b}-\vec{s}_i) \right\} \int \prod_{j=n+1}^A dx_j d\vec{s}_j \Psi_0^*(x_1, \vec{s}_1, \dots) \Psi_0(x_1, \vec{s}_1, \dots)$$

Si nous supposons maintenant que la densité à n particules est le produit de n fois la densité à une particule, c'est à dire si nous négligeons les corrélations dans le noyau, nous obtenons immédiatement

$$\begin{aligned}
\Gamma_n(\vec{b}) &= C_A^n \left[\int dx_1 d^2\vec{s}_1 I_1(\vec{b}-\vec{s}_1) \rho(x_1, \vec{s}_1) \right]^n \\
&= C_A^n \left[\int dx_1 d^2\vec{s}_1 d^2\vec{q} \frac{i}{2\pi k} f(\vec{q}) \rho(x_1, \vec{s}_1) e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{b}-\vec{s}_1)} \right]^n \\
&= C_A^n \left[\frac{i}{2\pi k} \int d^2\vec{q} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \rho(\vec{q}) f(\vec{q}) \right]^n
\end{aligned}$$

L'amplitude de diffusion π -noyau s'écrit alors comme la somme de A termes, correspondant aux diffusions simples, double, Aème.

$$F(\vec{q}) = F_I(\vec{q}) + F_{II}(\vec{q}) + \dots + F_A(\vec{q})$$

avec $F_I(\vec{q}) = A \rho(\vec{q}) f(\vec{q})$

$$F_{II}(\vec{q}) = \frac{A(A-1)}{2} \frac{i}{2\pi k} \int d^2\vec{q}_1 f(\vec{q}_1) \rho(\vec{q}_1) f(\vec{q}-\vec{q}_1) \rho(\vec{q}-\vec{q}_1)$$

$$F_N(\vec{q}) = \frac{A!}{N!(A-N)!} \left(\frac{i}{2\pi k} \right)^{N-1} \int d^2\vec{q}_1 \dots d^2\vec{q}_{N-1} f(\vec{q}_1) \rho(\vec{q}_1) f(\vec{q}_2) \rho(\vec{q}_2) \dots f(\vec{q}-\vec{q}_1-\vec{q}_2 \dots \vec{q}_{N-1}) \rho(\vec{q}-\vec{q}_1 \dots \vec{q}_{N-1})$$

La théorie de Glauber nous fournit donc un développement de l'amplitude de diffusion π -noyau très voisin du développement utilisé dans la dérivation du potentiel optique. Cependant comme les hypothèses de cette théorie sont quelque peu différentes, nous allons appliquer le modèle de Glauber à la diffusion élastique $\pi^{-12}\text{C}$ au voisinage de la résonance $(3/2, 3/2)$, en espérant que la comparaison des résultats de ces deux modèles sera fructueuse.

Pour cette application, nous nous limiterons aux déphasages S et P dans l'amplitude pion-nucléon et, avec les approximations faites, seule intervient la partie sans spin flip de cette amplitude :

$$f^{\text{CM}}(\vec{k}_i, \vec{k}_f) = (\alpha_3 T_{3/2} + \alpha_1 T_{1/2}) + [2\alpha_{33} + \alpha_{13}] T_{3/2} + (2\alpha_{31} + \alpha_{11}) T_{1/2} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_f$$

Or, sur couche de masse, nous avons : $q^2 = 2k^2 (1 - \cos \theta)$ et l'amplitude s'écrit :

$$f^{\text{CM}}(\vec{q}) = (\alpha_3 T_{3/2} + \alpha_1 T_{1/2}) + [(2\alpha_{33} + \alpha_{13}) T_{3/2} + (2\alpha_{31} + \alpha_{11}) T_{1/2}] k^2 \left(1 - \frac{q^2}{2k^2} \right)$$

L'amplitude de diffusion dans le laboratoire ne s'exprime pas aussi simplement en fonction des déphasages et du moment de transfert, cependant comme nous nous limitons aux petits angles, nous prendrons une expression approchée, valable à 0° :

$$f^{\text{Lab}}(\vec{q}) = \frac{k_{\text{Lab}}}{k_{\text{CM}}} f^{\text{CM}}(\vec{q})$$

D'autre part, plutôt que de prendre une amplitude de diffusion moyenne

$$A \bar{f}(\vec{q}) = Z f_{\pi-p}(\vec{q}) + (A-Z) f_{\pi-n}(\vec{q}), \text{ nous ferons la distinction entre neutrons et protons.}$$

Il convient alors de modifier l'expression de la fonction de profil du noyau $\Gamma_T(b)$. Avec les approximations faites, celle-ci s'écrivait :

$$1 + \Gamma_T(\vec{b}) = \left[\int dx d\vec{s} \rho(x, \vec{s}) \left(1 + \frac{i}{2\pi k} \int \bar{f}(\vec{q}) e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{b}-\vec{s})} d^2\vec{q} \right) \right]^A$$

et elle devient :

$$1 + \Gamma_T(\vec{b}) = [1 + I_{\pi-p}(\vec{b})]^Z [1 + I_{\pi-n}(\vec{b})]^{A-Z}$$

$$\text{où } I_{\pi^{-p}(\vec{b})}^{\pi^{-n}} = \int dx d\vec{s} \frac{i}{2\pi k} \int d^2\vec{q} f_{\pi^{-p}(\vec{q})}^{\pi^{-n}} e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{b} - \vec{s})}$$

$$\text{ou } \Gamma_T(\vec{b}) = \sum_{N=1}^A \sum_n C_Z^n C_{A-Z}^{N-n} I_{\pi^{-p}}^n(\vec{b}) I_{\pi^{-n}}^{N-n}(\vec{b})$$

Enfin, le C_{12} est décrit par le modèle des couches dans un puits d'oscillateur harmonique. La densité à une particule est alors :

$$\rho(r) = \frac{1}{3} \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\nu r^2} \left[1 + \frac{4}{3} \nu r^2 \right]$$

Avec cette forme les intégrales $I_{\pi^{-p}}(\vec{b})$ et $I_{\pi^{-n}}(\vec{b})$ peuvent être calculées analytiquement :

$$\begin{aligned} I(\vec{b}) &= \frac{i}{2\pi k} \int d^2\vec{q} dx d\vec{s} e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{b} - \vec{s})} \rho(x, \vec{s}) f(q) \\ &= e^{-\nu b^2} P(b^2) \end{aligned}$$

où $P(b^2)$ est un polynome de degré 4 en b . $\Gamma_T(b)$ devient :

$$\Gamma_T(\vec{b}) = \sum_{N=1}^A e^{-N\nu b^2} P_N(b^2)$$

et l'amplitude de diffusion π -noyau devient :

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \frac{k}{2i\pi} \int d^2b e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \sum_{N=1}^A e^{-N\nu b^2} P_N(b^2) \\ &= -ik \int b db J_0(qb) \sum_{N=1}^A e^{-N\nu b^2} P_N(b^2) \end{aligned}$$

Cette dernière intégration est effectuée numériquement par la méthode d'Hermite-Gauss. Dans les applications numériques les déphasages π -nucléon sont tirés de Donnachie (réf. Table I) et le paramètre de l'oscillateur harmonique a été choisi de telle sorte que le rayon moyen carré du C_{12} soit égal à 2.26 fm. Cette dernière valeur est celle donnée par les expériences de diffusion d'électron, après soustraction du rayon électromagnétique du proton.

Résultats

Tout d'abord il nous a semblé intéressant d'étudier la convergence de la série de Glauber. Dans la figure G1, nous avons tracé la partie imaginaire des amplitudes de diffusion simple, double,, à 180 Mev.

Le fait le plus frappant de cette figure est l'importance énorme des amplitudes de diffusion double, triple et même quadruple comparées à l'amplitude de diffusion simple à 0° . A plus grand angle cette situation est encore plus frappante puisque la position et la profondeur du 1er creux de diffraction, qui est dû habituellement à l'interférence entre les amplitudes de diffusion simple et double, ne peuvent être expliquées qu'en faisant intervenir tous les ordres de diffusion jusqu'au 8ème. La série de Glauber semble donc très lentement convergente, et dans les calculs numériques nous avons tenu compte de tous les ordres de diffusion jusqu'au 9ème. Il est aussi intéressant de noter que ceci ne se produit qu'au voisinage de la résonance, où la série de Glauber est alternée. A des énergies différentes (c'est à dire vers 120 Mev ou 260 Mev) la série n'est plus alternée et la convergence est plus rapide.

Dans la figure G2 nous présentons les résultats de distribution angulaire. Le moins que l'on puisse dire de ces courbes est que l'accord avec les résultats expérimentaux est inexplicablement bon si l'on songe aux approximations de la théorie de Glauber, en particulier pour les grands angles de diffusion. Cependant on doit noter que l'accord est d'autant moins bon que l'on s'éloigne de la résonance, et que vers l'avant la pente des courbes est légèrement différente de celle des résultats expérimentaux.

Dans la figure G3 sont portées les valeurs des sections efficaces totales. L'accord quantitatif est ici moins bon puisque le rapport entre les valeurs expérimentales et théoriques est voisin de 1.2, ce qui reflète en partie le désaccord entre les distributions angulaires vers l'avant. Cependant la variation de la section efficace totale en fonction de l'énergie est analogue à celle observée expérimentalement. Il faut noter en particulier que le maximum de la section efficace totale est atteint vers 150 Mev, alors que dans le cas de π -nucléon ce maximum se situe vers 190 Mev. Il semble donc que l'on puisse expliquer le déplacement du maximum de la section efficace totale sans faire intervenir de déplacement de l'énergie de résonance, mais simplement comme un effet non linéaire.*

Enfin dans la figure G4 nous comparons les prédictions des relations de dispersion vers l'avant et de la théorie de Glauber, en ce qui concerne la partie réelle de l'amplitude de diffusion à 0° . L'accord entre ces deux théories est excellent, comme dans le cas de la diffusion π -deutéron.

La théorie de Glauber semble donc s'appliquer avec succès au problème de la diffusion π -Noyau, même à des énergies aussi basses. Afin de comprendre les raisons de ce succès, et pour faciliter la comparaison entre le modèle de Kisslinger et la théorie de Glauber, nous allons montrer que celle-ci peut se retrouver à partir du formalisme du potentiel optique.

*Note : Cette effet a été clairement démontré dans un article récent de M. Locher et O. Steinmann. Toutefois ces auteurs ont utilisé dans leur calcul une amplitude de diffusion moyenne :

$$F(q) = \frac{1}{2} [f_{\pi-p}(\vec{q}) + f_{\pi-n}(\vec{q})]$$

Un calcul simple montre que, dans ces conditions, les amplitudes de diffusion simple et double sont correctement calculées mais que l'erreur sur le terme de diffusion triple peut être de l'ordre de 50 %, ce qui peut entraîner une modification importante des résultats du point de vue quantitatif.

D'autre part, il semble que le désaccord entre nos résultats et les résultats de C. Wilkin (Réf. III.17) soit imputable à la différence entre les rayons moyens carrés utilisés pour le ^{12}C .

IV - COMPARAISON ENTRE LE MODELE DE KISSLINGER ET LA THEORIE DE

GLAUBER

Dans ce chapitre, nous montrons que l'on peut retrouver la théorie de Glauber à partir de la théorie de la diffusion multiple de Watson. De plus, nous verrons que les approximations introduites dans cette dérivation sont relativement proches de celles utilisées dans le modèle de Kisslinger, ce qui explique en partie la similitude des résultats obtenus avec ces deux modèles.

Reprenons donc le développement de la matrice $M(E)$

$$\langle \vec{k}_f | 0 | M(E) | 0 \vec{k}_i \rangle = A \langle \vec{k}_f | 0 | t(E) | 0 \vec{k}_i \rangle + \frac{A(A-1)}{(2\pi)^3} \sum_{n, \vec{k}_n} \langle \vec{k}_f | 0 | t(E) | n \vec{k}_n \rangle G_0^+(E-E_n) \langle n \vec{k}_n | t(E) | 0 \vec{k}_i \rangle + \dots$$

Dans ce développement, afin de faire apparaître les densités à n particules, nous ferons l'approximation de fermeture sur les états nucléaires :

$$\sum_n |n\rangle \frac{1}{E+i\epsilon-\omega_n-E_N} \langle n| \simeq \frac{1}{E+i\epsilon-\omega_n-\bar{E}_N} \sum_n |n\rangle \langle n|$$

$$\simeq \frac{1}{E+i\epsilon-\omega_n-\bar{E}_N}$$

Cette approximation fait apparaître une énergie moyenne d'excitation des niveaux nucléaires que nous prendrons nulle. Ceci se justifie d'autant mieux que nous ne nous intéressons qu'aux faibles moments de transfert qui ne peuvent exciter de hauts niveaux. Avec cette approximation, le terme d'ordre n du développement s'écrit :

$$T_n = \frac{A(A-1)^{n-1}}{(2\pi)^{3(n-1)}} \int \left(\prod_{i=1}^n d\vec{p}_i d\vec{p}'_i \right) \left(\prod_{j=n+1}^A d\vec{p}_j \right) \left(\prod_{\ell=1}^{n-1} d\vec{k}_\ell \right) \Psi_0^*(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n \vec{p}_{n+1} \dots \vec{p}_A)$$

$$\Psi_0(\vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_n \vec{p}_{n+1} \dots \vec{p}_A) \langle \vec{p}_1, \vec{k}_f | t(E) | \vec{k}_1, \vec{p}'_1 \rangle \frac{1}{E^+ - \omega_{k_1}} \langle \vec{p}_2, \vec{k}_1 | \dots | \vec{k}_{n-1}, \vec{p}'_{n-1} \rangle \frac{1}{E^+ - \omega_{k_{n-1}}} \langle \vec{p}_n, \vec{k}_{n-1} | t(E) | \vec{k}_i, \vec{p}'_n \rangle$$

Cette expression, exacte pour le 1er et 2ème ordre, n'est qu'approximative pour les ordres supérieurs : elle suppose en effet que nous avons négligé les termes dans lesquels le pion interagit plusieurs fois avec le même nucléon. Par exemple dans le 3ème ordre nous avons négligé un terme qui fait intervenir la densité à 2 particules et qui correspond à l'expression :

$$\sum_{i \neq j} \langle 0 | t_i G_0^+(E) t_j G_0^+(E) t_i | 0 \rangle$$

Là encore, si l'on suppose que la diffusion pion-nucléon a lieu vers l'avant, ce terme doit être faible et cette approximation est donc justifiée. En conséquence le développement de la matrice $M(E)$ est tronqué et s'arrête à l'ordre A . Dans la suite du calcul nous ferons l'approximation statique, comme dans le modèle de Kisslinger, mais à haute énergie cette approximation est parfaitement justifiée. Nous mettons alors en évidence la densité à n nucléons et, comme dans la théorie de Glauber, nous supposons qu'il y a pas de corrélations nucléaires. Dans ces conditions le terme de degré n devient :

$$T_n = \frac{A(A-1)^{n-1}}{(2\pi)^{3(n-1)}} \int \prod_{j=1}^n d\vec{k}_j \rho(\vec{k}_f - \vec{k}_1) \langle \vec{k}_1 - \vec{k}_f, \vec{k}_f | t(E) | \vec{k}_1, \vec{0} \rangle \frac{1}{E^+ - \omega_{k_1}} \rho(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)$$

$$\langle \vec{k}_2 - \vec{k}_1, \vec{k}_1 | \dots \dots | \vec{k}_{n-1}, \vec{0} \rangle \frac{\rho(\vec{k}_{n-1} - \vec{k}_1)}{E^+ - \omega_{k_{n-1}}} \langle \vec{k}_1 - \vec{k}_{n-1}, \vec{k}_{n-1} | t(E) | \vec{k}_1, \vec{0} \rangle$$

Pour suivre la théorie de Glauber, nous supposons que dans le propagateur du pion

$$\frac{1}{E^+ - \omega_k} = -i\pi \delta(\omega_k - E) + P \frac{1}{E - \omega_k}$$

la contribution de la partie principale est faible, c'est à dire que le pion se propage sur sa couche de masse. De plus, nous supposons que, sur couche de masse, la matrice de diffusion π -nucléon ne dépend que du moment de transfert.

$$\langle \vec{p}_f, \vec{k}_f | t(E) | \vec{k}_i, \vec{p}_i \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_f + \vec{k}_f - \vec{p}_i - \vec{k}_i) h(E, \vec{k}_f - \vec{k}_i)$$

Dans ces conditions, en utilisant la relation :

$$\int d^3 k_j \delta(\sqrt{k_j^2 + \mu^2} - E) = \int E k_j dk_j d\Omega_{k_j} \delta(k_j - k) \quad \text{où } k \text{ est le moment}$$

du pion incident, nous obtenons :

$$T_n = \frac{A(A-1)^{n-1} (-i\pi E k)^{n-1}}{(2\pi)^{3(n-1)}} \int \left(\prod_{j=1}^{n-1} d\Omega_{\vec{k}_j} \right) h(\vec{k}_f - \vec{k}_1) \rho(\vec{k}_f - \vec{k}_1) \dots h(\vec{k}_{n-1} - \vec{k}_1) \rho(\vec{k}_{n-1} - \vec{k}_1)$$

$$\text{où } |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \dots = |\vec{k}_{n-1}| = |\vec{k}_i| = |\vec{k}_f| = k = \sqrt{E^2 - \mu^2}$$

Or, si l'on suppose que toutes les diffusions ont lieu à faible angle et que la diffusion totale n'est importante qu'à faible angle, on peut considérer que tous les moments de transfert sont dans le plan perpendiculaire à $\vec{k}_i$. On peut alors remplacer l'intégration sur les angles de $\vec{k}_1 \dots \vec{k}_{n-1} \dots$ par une intégration sur les moments de transfert $\vec{q}_{n-1} = \vec{k}_{n-1} - \vec{k}_i$, $\dots \vec{q}_1 = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$. Le Jacobien de la transformation est alors égal à $\frac{1}{k^2}$:

$$\int d\Omega_{\vec{k}_1} \approx \int \frac{d^2 \vec{q}}{k^2} \quad \text{et } T_n \text{ devient :}$$

$$T_n = A \left(\frac{-i E(A-1)}{4\pi^2 k} \right)^{n-1} \int d^2 \vec{q}_1 \dots d^2 \vec{q}_{n-1} \rho(\vec{q} - \vec{q}_1 \dots - \vec{q}_{n-1}) h(\vec{q} - \vec{q}_1 \dots - \vec{q}_{n-1}) \rho(\vec{q}_1) h(\vec{q}_1) \dots \dots \rho(\vec{q}_{n-1}) h(\vec{q}_{n-1})$$

En utilisant la relation entre la matrice t et l'amplitude de diffusion

$$h(\vec{q}) = -2\pi \frac{(E+m)}{Em} f(\vec{q})$$

$$T(\vec{q}) = -2\pi \left(\frac{E+M}{EM} \right) F(\vec{q})$$

où m est la masse du nucléon, M la masse du noyau, $f(\vec{q})$ l'amplitude de diffusion pion-nucléon, $F(\vec{q})$ l'amplitude de diffusion pion-noyau, on obtient la décomposition suivante de $F(\vec{q})$

$$F(\vec{q}) = F_I(\vec{q}) + F_{II}(\vec{q}) + \dots + F_A(\vec{q})$$

$$\text{avec } F_n(\vec{q}) = A(A-1)^{n-1} \frac{M}{m} \frac{E+m}{E+M} \left(\frac{i(E+m)}{4\pi k m} \right)^{n-1} I_n(\vec{q})$$

$$I_n(\vec{q}) = \int \prod_{i=1}^{n-1} d^2 q_i \rho(\vec{q}-\vec{q}_1 \dots -\vec{q}_{n-1}) f(\vec{q}-\vec{q}_1 \dots -\vec{q}_{n-1}) \rho(\vec{q}_1) f(\vec{q}_1) \dots \rho(\vec{q}_{n-1}) f(\vec{q}_{n-1})$$

Pour aboutir enfin au résultat de la Théorie de Glauber, il ne reste plus qu'à faire l'approximation d'impulsion, c'est à dire à supposer que $f(q)$ est l'amplitude de diffusion pion-nucléon libre. Cependant les deux développements obtenus diffèrent d'une part par des coefficients cinématiques, d'autre part par les poids donnés aux divers ordres. En effet la théorie de Glauber nous donne :

$$F_N^G(\vec{q}) = \frac{A!}{N! (A-N)!} \left(\frac{i}{2\pi k} \right)^{N-1} I_N(\vec{q})$$

alors que nous obtenons ici :

$$F_N(\vec{q}) = A \left(\frac{A-1}{2} \right)^{N-1} \left(\frac{i}{2\pi k} \right)^{N-1} \frac{M}{E+M} \left(\frac{E+m}{m} \right)^N I_N(\vec{q})$$

Pour que ces deux modèles soient équivalents, il faut donc, d'une part, que l'énergie de la particule incidente soit faible devant la masse du nucléon et, d'autre part, que les amplitudes d'ordre supérieur à 2 soient petites.

Pour résumer, il est peut-être intéressant de rappeler brièvement les points communs du modèle de Kisslinger et de la théorie de Glauber.

Kisslinger	Glauber
I Approximation d'impulsion	"
II Approximation statique	"
III Forme de la matrice t	
Vraie sur couche de masse, mais probablement mauvaise hors couche	Dépendance en moment de transfert seul Vrai sur couche de masse
IV Diffusion hors couche de masse	
Traitement correct, avec une forme douteuse de t .	Complètement négligée
Cinématique peu correcte	

V	Excitations nucléaires	
	Complètement négligées. Mais le résultat serait le même avec l'approximation de fermeture, si l'on néglige les corrélations et l'excitation nucléaire moyenne	Traitement correct, avec l'approximation de fermeture, et sans corrélation. On néglige l'excitation moyenne du noyau
VI	Développement	
	Ordre illimité	Tronqué à l'ordre A
VII	Angle de diffusion	
	Aucune condition	Limité aux petits angles

Après ce tableau comparatif entre les deux modèles, il semble que l'on puisse s'étonner de la similitude de leurs résultats. En effet si certaines approximations sont communes à ces deux théories, elles diffèrent cependant par quelques points assez importants : effets hors couche de masse, poids de chaque ordre dans le développement, limites sur l'angle de diffusion... En tout état de cause il semble que l'on soit incapable d'expliquer correctement pourquoi ces deux théories s'appliquent avec succès à ce problème. Il nous a donc paru nécessaire d'approfondir la question et d'essayer de traiter le problème le plus correctement possible (?). Certes cela entraîne de grosses complications, essentiellement numériques, mais nous pensons que c'est par ce seul moyen que nous pourrions comprendre effectivement l'interaction pion-noyau.

Dans cette deuxième partie nous allons appliquer le formalisme du potentiel optique au problème de la diffusion pion-noyau au voisinage de la résonance. Notre but étant d'améliorer le modèle de Kisslinger nous ne ferons pas toutes les approximations faites dans celui-ci. En particulier nous choisirons une forme de la matrice t π -nucléon qui décrive correctement la résonance $(3/2, 3/2)$ et qui ait un comportement correct hors de la couche de masse. D'autre part nous essaierons de déterminer une correction à l'approximation d'impulsion et nous éviterons l'approximation statique. De plus dans le calcul des éléments de matrice du potentiel nous essaierons d'utiliser une cinématique correcte pour tenir compte des effets hors couche de masse et du recul du noyau. Pour atteindre ce but nous nous ramènerons à un problème à 3 corps : le pion, un nucléon et le reste du noyau considéré comme une particule. Ceci apporte une simplification notable au problème et permet alors de définir correctement la cinématique de la collision.

V - DESCRIPTION DU NOYAU

Notre but étant de nous ramener à un problème à 3 corps nous allons décomposer les fonctions d'onde nucléaire à A nucléons sur la base des états à une particule et à (A-1) particules. Le Hamiltonien nucléaire :

$$H_A = \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j} V_{ij}$$

peut en effet s'écrire, en particulierisant le nucléon 1 :

$$\begin{aligned} H_A &= \sum_{i=2}^A \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{2 \leq i < j}^A V_{ij} + \frac{p_1^2}{2m} + \sum_{i=2}^A V_{1i} \\ &= H_{A-1} + \frac{p_1^2}{2m} + \sum_{i=2}^A V_{1i} \end{aligned}$$

Si l'on suppose connue la base des états à (A-1) nucléons $|n, P_n\rangle$, on peut décomposer tout état à A nucléons $|N, P_N\rangle$ sur la base produit des états à (A-1) nucléons et des états à 1 nucléon $|\alpha, p_1\rangle$. En tenant compte de la conservation de l'impulsion, on peut écrire :

$$|N, \vec{P}_N\rangle = \sum_{\substack{\vec{\alpha p}_1 \\ n, \vec{p}_n}} \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_n - \vec{P}_N) \varphi_{n\alpha}^N(\vec{p}_1, \vec{p}_n) |\alpha, \vec{p}_1\rangle |n, \vec{p}_n\rangle$$

Les fonctions d'onde relatives $\varphi_{n\alpha}^N(\vec{p}_1, \vec{p}_n)$ vérifient les équations :

$$\left[E_N - \frac{p_N^2}{2M} - \left(E_n - \frac{p_n^2}{2M_n} \right) - \frac{p_1^2}{2m} \right] \varphi_{n\alpha}^N(\vec{p}_1, \vec{p}_n) = \sum_{\substack{\alpha', \vec{p}'_1 \\ n', \vec{p}'_n}} \delta(\vec{p}'_1 + \vec{p}'_n - \vec{P}_N)$$

$$\langle n, \vec{p}_n, \alpha, \vec{p}_1 | \sum_{i=2}^A V_{1i} (\vec{p}_1 - \vec{p}_i, \vec{p}_1 - \vec{p}'_i) | \alpha', \vec{p}'_1, n', \vec{p}'_n \rangle \varphi_{n', \alpha'}^N(\vec{p}'_1, \vec{p}'_n)$$

où M est la masse de l'état $|N\rangle$ et E_N son énergie de liaison

M_n est la masse de l'état $|n\rangle$ et E_n son énergie de liaison

En introduisant les variables relatives au centre de masse de l'état à (A-1) particules

$$\vec{q}_i = \vec{p}_i - \frac{m}{M_n} \vec{P}_n, \quad \vec{q}'_i = \vec{p}'_i - \frac{m}{M_n} \vec{P}'_n$$

on voit que l'élément de matrice qui figure au deuxième membre de l'équation ne dépend que des impulsions relatives

$$\vec{q}_1 = \frac{M_n \vec{p}_1 - m \vec{p}_n}{M_n + m}, \quad \vec{q}_1' = \frac{M_n \vec{p}_1' - m \vec{p}_n'}{M_n + m}$$

$$\langle n \vec{p}_n, \alpha \vec{p}_1 | \sum_{i=2}^A V(\vec{p}_1 - \frac{m}{M_n} \vec{p}_n - \vec{q}_1, \vec{p}_1' - \frac{m}{M_n} \vec{p}_n' - \vec{q}_1') | \alpha' \vec{p}_1', n' \vec{p}_n' \rangle = U_{nn'}^{\alpha\alpha'}(\vec{q}_1, \vec{q}_1')$$

Le système d'équation devient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{q_1'} \left[(E_N - E_n - \frac{q_1'^2}{2m}) \delta(\vec{q}_1 - \vec{q}_1') - U_{nn}^{\alpha\alpha}(\vec{q}_1, \vec{q}_1') \right] \varphi_{n\alpha}^N(\vec{q}_1') \\ = \sum_{\substack{\vec{q}_1' \\ \alpha' \\ (n') \neq (n)}} U_{nn'}^{\alpha\alpha'}(\vec{q}_1, \vec{q}_1') \varphi_{n'\alpha'}^N(\vec{q}_1') \end{aligned}$$

La résolution de ce système n'est évidemment pas facile puisqu'il résume le problème à A corps ; aussi n'essaierons nous pas de le résoudre, mais nous supposons que le modèle des couches nous en donne une solution approximative. Soit en effet un état du modèle des couches

$$\langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_A | N \rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{bmatrix} \varphi_{N_1}(\vec{p}_1) & \varphi_{N_2}(\vec{p}_1) & \dots & \varphi_{N_A}(\vec{p}_1) \\ \varphi_{N_1}(\vec{p}_2) & \varphi_{N_2}(\vec{p}_2) & \dots & \varphi_{N_A}(\vec{p}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N_1}(\vec{p}_A) & \varphi_{N_2}(\vec{p}_A) & \dots & \varphi_{N_A}(\vec{p}_A) \end{bmatrix}$$

En le développant par rapport à la première ligne nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 \dots \vec{p}_A | N \rangle = \frac{1}{\sqrt{A}} \left\{ \varphi_{N_1}(\vec{p}_1) \frac{1}{\sqrt{(A-1)!}} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} - \varphi_{N_2}(\vec{p}_1) \frac{1}{\sqrt{(A-1)!}} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^A \varphi_{N_A}(\vec{p}_1) \frac{1}{\sqrt{(A-1)!}} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ce développement est assez voisin de celui que nous cherchons. On peut considérer en effet que les déterminants de Slater d'ordre (A-1) sont approximativement des états propres du Hamiltonien à (A-1) nucléons. Il suffit ensuite de tenir compte de la conservation de l'impulsion que le modèle des couches néglige pour obtenir la solution souhaitée :

$$| N \vec{p}_N \rangle = \sum_{\substack{\vec{p}_1, \vec{p}_n \\ \alpha, n}} \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_n - \vec{p}_N) \varphi_{n\alpha}^N \left(\frac{M_n \vec{p}_1 - m \vec{p}_n}{m + M_n} \right) | \alpha \vec{p}_1 \rangle | n \vec{p}_n \rangle$$

Dans cette formule les fonctions d'onde relatives $\varphi_{n\alpha}^N |\vec{q}|$ sont les fonctions d'onde des états propres du puits, et les états $|n\rangle$ sont des états à 1 trou dans l'état $|N\rangle$. La sommation porte sur tous les états à une particule occupés dans l'état $|N\rangle$ du modèle des couches. Par exemple, dans le cas du fondamental du C_{12} , les deux états occupés sont les états $1S_{1/2}$ et $1P_{3/2}$, et la fonction d'onde s'écrit :

$$|0 \vec{P}\rangle = \sum_{\vec{p}_1, \vec{p}_n} \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_n - \vec{P}) \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\substack{s,t \\ m_1, m_n}} \langle 0 0 \frac{1}{2} s | \frac{1}{2} m_1 \rangle \langle \frac{1}{2} m_1 \frac{1}{2} m_n | 0 0 \rangle \right.$$

$$\varphi_{00}(\vec{q}_1) |\vec{p}_1 s t\rangle |\vec{P}_n, \frac{1}{2} m_n, -t\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{\substack{s,t \\ m, m_1, m_n}} \langle 1 m \frac{1}{2} s | \frac{3}{2} m_1 \rangle$$

$$\left. \langle \frac{3}{2} m_1 \frac{3}{2} m_n | 0 0 \rangle \varphi_{01}^m(\vec{q}_1) |\vec{p}_1 s t\rangle |\vec{P}_n, \frac{3}{2} m_n, -t\rangle \right\}$$

où s (resp. t) est le spin (resp. isospin) du nucléon et φ_{00} et φ_{01}^m sont les fonctions d'onde des états les plus bas de moment angulaire 0 et 1.

Nous disposons ainsi d'une description du noyau qui nous permet de ramener le problème de la diffusion pion-noyau à un problème à 3 corps. Certes ce modèle est assez grossier mais il présente l'avantage de tenir compte de la conservation de l'impulsion et de permettre un calcul correct de la cinématique de la collision.

VI - MATRICE DE DIFFUSION PION-NUCLEON

VI.1 Matrice de diffusion pion-nucléon libre

Dans le domaine d'énergie qui nous intéresse, l'onde partielle $P(3/2, 3/2)$ est très nettement prépondérante. Aussi ne rechercherons nous une paramétrisation correcte de la matrice de diffusion pion-nucléon que pour cette onde partielle. Dans la suite du problème nous négligerons donc la contribution des autres amplitudes partielles, ou bien, si nous voulons en tenir compte, nous le ferons de manière classique en utilisant la valeur de l'amplitude à 0° .

Les caractéristiques de l'amplitude de diffusion $P(3/2, 3/2)$ sont d'une part la présence de la résonance $N^*(1236)$, d'autre part l'élasticité puisque la production de pion ne devient importante qu'au dessus de 300 Mev. Pour satisfaire à la première exigence nous prendrons une forme de Breit-Wigner pour décrire la matrice de transition π -nucléon ; dans le centre de masse pion-nucléon elle s'écrit donc :

$$\langle \vec{p} | \tau(E) | \vec{q} \rangle = F(p) D(E) F(q) P_{3/2} T_{3/2}$$

Dans cette expression $T_{3/2}$ est le projecteur sur les états d'isospin total $3/2$, et $P_{3/2}(\vec{p}, \vec{q})$ est le projecteur sur les états de moment cinétique total $3/2$ et contient la dépendance angulaire en $\vec{p}$ et $\vec{q}$.

$$P_{3/2} = 2 \vec{p} \cdot \vec{q} - i \vec{\sigma} (\vec{p} \wedge \vec{q})$$

$$T_{3/2} = \frac{2(1 + \vec{t} \cdot \vec{\tau})}{3}$$

$F(p)$ et $D(E)$ sont ce que l'on peut appeler le facteur de forme et le propagateur de la résonance :

$$D(E) = \frac{1}{E - E_R + i\Gamma} \quad \text{où } E_R \text{ est l'énergie de la résonance et } \Gamma \text{ sa largeur.}$$

Pour satisfaire la deuxième exigence, nous appliquons l'unitarité à cette forme de la matrice T , ce qui nous donnera une relation entre la largeur Γ et le facteur de forme $F(p)$. A partir de la définition de la matrice T

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) T_{fi}$$

et de la relation d'unitarité de la matrice S :

$$S^+ S = S S^+ = I$$

la relation entre Γ et $F(p)$ s'obtient aisément :

$$\Gamma(E) = \frac{1}{2\pi} \int p^4 F^2(p) \delta(\sqrt{p^2 + \mu^2} + \sqrt{p^2 + m^2} - E) dp$$

Enfin la détermination de la matrice T se fait en passant à la limite $(\mu/m) \rightarrow 0$ et en comparant à la théorie de Chew et Low. Le facteur de forme de la résonance est alors relié au facteur de forme du nucléon $V(p)$ qui intervient dans cette théorie :

$$F(p) = C \left(\frac{1}{\sqrt{p^2 + \mu^2}} + \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right) V(p)$$

avec
$$C = \left[\frac{2\pi}{3} \frac{(f/\mu)^2}{\mu^2} \frac{E_R^4 - (m^2 - \mu^2)^2}{E_R^3} \right]^{1/2}$$

où f est la constante de couplage renormalisée pion-nucléon .

La détermination du facteur de forme du nucléon $V(p)$ se fait ensuite numériquement par comparaison avec le déphasage expérimental $(3/2, 3/2)$. Tous nos calculs ont été faits en utilisant la paramétrisation de McKinley* pour cette onde partielle.

VI.2 Matrice de diffusion pion-nucléon dans la matière nucléaire

Dans le premier chapitre, nous avons vu que dans le calcul du potentiel optique intervient l'opérateur $t(E)$ (que nous avons baptisé matrice de diffusion pion-nucléon dans la matière nucléaire) qui satisfait à l'équation intégrale suivante :

$$t_{\alpha}(E) = v_{\alpha} + v_{\alpha} G_0^{+}(E) t_{\alpha}(E) \quad \text{où} \quad G_0^{+}(E) = [E^{+} - H_A - K]^{-1}$$

et où v_{α} est l'interaction entre le pion et le nucléon α .

Nous avons vu que cet opérateur $t(E)$ pouvait être relié à la matrice de diffusion π -nucléon libre. Cependant en raison de la description choisie pour le noyau, nous allons relier $t_{\alpha}(E)$ à la matrice de diffusion π -nucléon en présence d'une troisième particule $\tau'_{\alpha}(E)$.

Cet opérateur $\tau'_{\alpha}(E)$ est celui qui intervient dans le problème à 3 corps et satisfait à l'équation intégrale :

$$\tau'_{\alpha}(E) = v_{\alpha} + v_{\alpha} g_0^{+}(E) \tau'_{\alpha}(E)$$

où $g_0^{+}(E) = [E^{+} - K - H_{\alpha} - H_{A-1}]^{-1}$ est le propagateur libre du pion, d'un nucléon et du reste du noyau que nous appellerons dorénavant le "cœur".

Note : Dans toute cette partie, nous incluons la masse des particules dans le Hamiltonien de cette particule. De plus nous ne ferons pas de distinction, en ce qui concerne le nucléon, entre son hamiltonien classique

$$H_{\alpha} = m + \frac{p_{\alpha}^2}{2m}$$

et son hamiltonien relativiste

$$H_{\alpha} = \sqrt{p_{\alpha}^2 + m^2}$$

Ceci dans le seul but de pouvoir passer facilement de la cinématique non relativiste du noyau à la cinématique relativiste de la diffusion π -nucléon.

Avec ces conventions l'énergie E qui figure dans les équations intégrales comprend elle aussi la masse des particules en interaction.

*J.M. McKinley Review of Modern Physics 35, 737 (1963)

On voit facilement que cet opérateur est diagonal par rapport aux états du coeur et que les éléments de matrice se déduisent de ceux de $\tau_\alpha(E)$ par :

$$\begin{aligned} \langle n' \vec{P}'_n, \vec{P}'_\alpha, \vec{q}' i' | \tau'_\alpha(E) | \vec{q} i, \vec{P}_\alpha, \vec{P}_n n \rangle &= (2\pi)^3 \delta(\vec{P}_n - \vec{P}'_n) \delta_{nn'} \\ \langle p'_\alpha, \vec{q}' i' | \tau_\alpha(E - M_n - \frac{P_n^2}{2M_n}) | \vec{q} i, \vec{P}_\alpha \rangle & \end{aligned}$$

Nous allons maintenant établir une équation intégrale entre cet opérateur $\tau'_\alpha(E)$ et l'opérateur $t_\alpha(E)$ dont nous avons besoin dans le calcul du potentiel optique. Moyennant l'hypothèse que l'interaction v_α est indépendante de l'énergie nous pourrions même relier $t_\alpha(E)$ à l'opérateur $\tau'_\alpha(E')$ à une énergie différente.

En utilisant les égalités employées dans le premier chapitre, nous obtenons

$$\begin{aligned} t_\alpha(E) &= v_\alpha + v_\alpha G_o^+(E) t_\alpha(E) \\ &= v_\alpha + v_\alpha G^+(E) v_\alpha \\ G^+(E) &= [E^+ - K - H_A - v_\alpha]^{-1} \\ &= [E^+ - K - H_\alpha - H_{A-1} - v_\alpha]^{-1} \{ 1 + (E' - E + H_A - H_{A-1} - H_\alpha) [E^+ - K - H_A - v_\alpha]^{-1} \} \end{aligned}$$

ou
$$G^+(E) = g^+(E') [1 + (E' - E + H_A - H_{A-1} - H_\alpha) G^+(E)]$$

On en déduit donc immédiatement

$$\begin{aligned} t_\alpha(E) &= \tau'_\alpha(E') + \tau'_\alpha(E') g_o^+(E') (E' - E - H_A - H_{A-1} - H_\alpha) G_o^+(E) t_\alpha(E) \\ &= \tau'_\alpha(E') + \tau'_\alpha(E') K_\alpha t_\alpha(E) \end{aligned}$$

VI.2.A Approximation d'impulsion

Ce que l'on appelle ordinairement l'approximation d'impulsion revient à prendre $E'=E$ et à négliger la contribution du 2ème terme de l'équation intégrale :

$$t_\alpha(E) = \tau'_\alpha(E)$$

Cette approximation n'est justifiée que si l'on peut négliger les éléments de matrice de l'interaction nucléon-"coeur" :

$$\langle \alpha \vec{p}_\alpha, n \vec{P}_n | H_A - H_{A-1} - H_\alpha | N \vec{P}_N \rangle = \langle \alpha \vec{p}_\alpha, n \vec{P}_n | U_\alpha | N \vec{P}_N \rangle$$

Or dans le domaine d'énergie considéré, les transferts d'impulsion fournis aux nucléons sont de l'ordre du moment de Fermi dans le noyau. Les niveaux nucléaires que l'on peut atteindre à partir du fondamental sont donc faiblement excités, et le "coeur" reste donc dans son état fondamental. Dans ces conditions l'élément de matrice précédent n'est pas négligeable, et il semble nécessaire d'apporter une correction à l'approximation d'impulsion.

Note : Dans cette partie les états du coeur seront notés n , leur impulsion $\vec{P}_n$, leur masse M_n . L'impulsion du nucléon α sera notée $\vec{P}_\alpha$ et ses nombres quantiques α , l'impulsion du pion sera notée $\vec{q}$ et son isospin i .

VI.2.B Correction à l'approximation d'impulsion dans le système du centre de masse π -nucléon

Dans cette partie, nous essayons de déterminer l'influence de l'interaction nucléon-"cœur" sur la matrice $t(E)$. Pour cela nous allons évaluer le paramètre E' de telle sorte que la contribution de la deuxième partie de l'équation intégrale soit aussi faible que possible.

Considérons donc les éléments de matrice de K_α :

$$A = \langle n' \vec{P}'_n, \alpha' \vec{p}'_\alpha, \vec{q}' i' | K_\alpha | \vec{q} i, \alpha \vec{p}_\alpha, n \vec{P}_n \rangle$$

$$\text{Or } \langle n' \vec{P}'_n, \alpha' \vec{p}'_\alpha, \vec{q}' i' | g_0^+(E') = \frac{1}{E'^+ - M_n - m - \frac{\vec{P}_n'^2}{2M_n} - \frac{\vec{p}_\alpha'^2}{2m} - \omega_{q'}} \langle n' \vec{P}'_n, \alpha' \vec{p}'_\alpha, \vec{q}' i' |$$

$$G_0^+(E) | \vec{q} i, \alpha \vec{p}_\alpha, n \vec{P}_n \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{N, \vec{P}_N} | N \vec{P}_N, \vec{q} i \rangle \frac{1}{E^+ - M - E_N - \frac{P_N^2}{2M} - \omega_q} \langle N \vec{P}_N | \alpha \vec{p}_\alpha, n \vec{P}_n \rangle$$

$$\langle n' \vec{P}'_n, \alpha' \vec{p}'_\alpha, \vec{q}' i' | (E' - E + H_A - H_{A-1} - H_\alpha) | N \vec{P}_N, \vec{q} i \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{q}') \delta ii' \\ (E' - E + M + E_N + \frac{P_N^2}{2M} - M_n - \frac{P_n'^2}{2M_n} - m - \frac{p_\alpha'^2}{2m}) \langle \vec{P}'_n n', \vec{p}'_\alpha \alpha' | N \vec{P}_N \rangle$$

L'élément de matrice A s'écrit donc :

$$A = \delta(\vec{q} - \vec{q}') \delta ii' \langle n' \vec{P}'_n, \alpha' \vec{p}'_\alpha | \sum_{N, \vec{P}_N} | N \vec{P}_N \rangle \left\{ \frac{1}{E^+ - M - E_N - \frac{P_N^2}{2M} - \omega_q} - \frac{1}{E'^+ - M_n - m - \frac{P_n'^2}{2M_n} - \frac{p_\alpha'^2}{2m} - \omega_{q'}} \right\} \\ \langle N \vec{P}_N | \alpha \vec{p}_\alpha, n \vec{P}_n \rangle$$

Pour poursuivre le calcul nous avons besoin de la relation de fermeture sur les états nucléaires. Il faut remarquer que, dans le cas qui nous occupe, nous n'avons pas tenu compte de l'antisymétrie entre le nucléon α et le cœur ; par conséquent, nous n'en tiendrons pas compte dans la relation de fermeture qui s'écrit alors :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{N, \vec{P}_N} \langle n' \vec{P}'_n, \alpha' \vec{p}'_\alpha | N \vec{P}_N \rangle \langle N \vec{P}_N | \alpha \vec{p}_\alpha, n \vec{P}_n \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{P}'_n - \vec{P}_n') \delta nn' (2\pi)^3 \delta(\vec{p}'_\alpha - \vec{p}_\alpha') \delta \alpha \alpha'$$

Note : $|N, P_N\rangle$ état excité à A nucléons, de masse M , d'énergie d'excitation E_N .

Si, de plus, nous faisons l'approximation de fermeture :

$$\sum_N \frac{|N\rangle\langle N|}{E - E_N} \approx \frac{1}{E - \bar{E}_N} \sum_N |N\rangle\langle N|$$

où $\bar{E}_N$ est une énergie moyenne d'excitation qui reste à déterminer, nous obtenons pour A :

$$A = (2\pi)^3 \delta(\vec{q}-\vec{q}') \delta_{ii'} (2\pi)^3 \delta(\vec{P}_n-\vec{P}'_n) \delta_{nn'} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_\alpha-\vec{p}'_\alpha) \delta_{\alpha\alpha'} \\ \times \left[\frac{1}{E^+ - M - \bar{E}_N - \frac{(\vec{P}_n + \vec{P}_\alpha)^2}{2M} - \omega_q} - \frac{1}{E^+ - M_n - m - \frac{P_n^2}{2M_n} - \frac{p_\alpha^2}{2m} - \omega_q} \right]$$

Avec ces approximations, A est donc diagonal par rapport aux états du coeur. En utilisant le développement de l'équation intégrale vérifiée par $t_\alpha(E)$:

$$t_\alpha(E) = \tau'_\alpha(E') + \tau'_\alpha(E') K_\alpha t_\alpha(E) \\ = \tau'_\alpha(E') + \tau'_\alpha(E') K_\alpha \tau'_\alpha(E') + \dots$$

et le fait que $\tau'_\alpha(E')$ et K_α sont diagonaux par rapport aux états du coeur, on en déduit immédiatement que $t_\alpha(E)$ l'est aussi. En utilisant la conservation de l'impulsion totale, on voit alors que le système du centre de masse π -nucléon est invariant par t_α et peut donc être utilisé pour calculer les éléments de matrice de K_α .

Dans ce système, la seule variable sur laquelle on doit intégrer est le moment du pion dans l'état intermédiaire et la deuxième partie du deuxième membre de l'équation intégrale peut s'écrire :

$$\langle \tau'_\alpha(E') K_\alpha t_\alpha(E) \rangle = \int d^3\vec{q} P(\vec{q}) \left\{ \frac{1}{E^+ - M - \bar{E}_N - \frac{(\vec{P}_n - \vec{q})^2}{2M} - \omega_q} - \frac{1}{E^+ - M_n - m - \frac{P_n^2}{2M_n} - \frac{q^2}{2m} - \omega_q} \right\}$$

Dans cette expression nous n'avons explicité que le point qui nous intéresse, à savoir que cet élément de matrice dépend de la différence de deux propagateurs. Il est clair que ce terme est minimum lorsque les poles de ces propagateurs coïncident car, alors, la partie imaginaire s'annule et la partie réelle, différence de deux parties principales très voisines, doit être très faible. La condition cherchée pour E' s'écrit donc :

$$E' = M_n + m + \frac{P_n^2}{2M_n} + \frac{q^2}{2m} + \omega_q$$

sachant que q vérifie l'équation

$$E = M + \bar{E}_N + \frac{(\vec{P}_n - \vec{q})^2}{2M} + \omega_q$$

En négligeant les énergies cinétiques du noyau et du coeur, et en utilisant l'égalité :

$$M = M_n + m - E_\alpha, \text{ où } E_\alpha \text{ est l'énergie de liaison du nucléon } \alpha \text{ au coeur,}$$

on obtient :

$$E' \approx E + (E_\alpha - \bar{E}_N) + \frac{(E + (E_\alpha - \bar{E}_N) - M_n - m)^2 - \mu^2}{2m}$$

et l'équation intégrale se réduit approximativement à

$$t_\alpha(E) = \tau'_\alpha(E')$$

Nous avons ainsi déterminé une correction à l'approximation d'impulsion. Certes nous avons fait apparaître une énergie moyenne d'excitation $\bar{E}_N$ qui, pour le moment, n'est qu'un paramètre ajustable. Cependant il est raisonnable de penser que cette énergie moyenne d'excitation est de l'ordre de l'énergie de liaison nucléon-coeur dans le domaine d'énergie qui nous intéresse. Avec cette hypothèse, on voit que l'énergie de la collision π -nucléon doit être remplacée par une énergie effective, plus élevée, qui tient compte des effets de liaison nucléon coeur. Avec la cinématique choisie nous obtenons approximativement :

$$E_{\pi N} = E - M_n - \frac{P_n^2}{2M_n}$$

et
$$E_{\pi N}^{\text{eff.}} = E' - M_n - \frac{P_n^2}{2M_n}$$

Or
$$E' \approx E + \frac{(E - M_n - m)^2 - \mu^2}{2m}$$

Donc
$$E_{\pi N}^{\text{eff.}} \approx E_{\pi N} + \frac{k_\pi^2}{2m}$$

Cette correction n'est donc pas négligeable puisque, au voisinage de la résonance, elle est de l'ordre de 45 Mev, ce qui peut notablement modifier la position de la résonance dans la diffusion pion-noyau.

VI.2.C Correction à l'approximation d'impulsion pour la diffusion élastique

La correction que nous venons d'étudier dépend d'un paramètre $\bar{E}_N$ dont l'évaluation est délicate. Pour remédier à cet inconvénient nous allons estimer ce paramètre dans le cas de la diffusion élastique. Pour cela nous calculons les éléments de matrice de $\tau'_\alpha(E') K_\alpha \tau'_\alpha(E')$ entre deux états nucléaires fondamentaux. Dans ce calcul nous ferons les approximations suivantes :

- a) f.o. nucléaires non antisymétrisées
- b) Approximation statique pour les nucléons
- c) On néglige les effets de spin-flip
- d) On ne tient pas compte de la conservation de l'impulsion

Avec ces hypothèses , l'élément de matrice considéré s'écrit facilement :

$$A = \langle 0\vec{q}_f | \tau'_\alpha(E') K_\alpha \tau'_\alpha(E') | 0\vec{q}_i \rangle = \sum_{\vec{q}_n} B \langle \vec{q}_f | \tau(E'-M_n) | \vec{q}_n \rangle \langle \vec{q}_n | \tau(E'-M_n) | \vec{q}_i \rangle$$

$$B = \sum_N \frac{\rho_{N\alpha N}(\vec{q}_f - \vec{q}_n) \rho_{NN\alpha}(\vec{q}_n - \vec{q}_i)}{E^+ - M - (E_N - E_{N\alpha}) - \omega_{q_n}} - \sum_{\vec{P}_n} \frac{\varphi_{N\alpha}^*(\vec{P}_n + \vec{q}_n - \vec{q}_f) \varphi_{N\alpha}(\vec{P}_n + \vec{q}_n - \vec{q}_i)}{E^+ - M_n - m - \frac{P_n^2}{2m} - \omega_{q_n}}$$

Dans cette expression $\varphi_{N\alpha}(\vec{k})$ est la fonction d'onde du nucléon α dans le noyau, $\rho_{N\alpha N}(\vec{q})$ est la transformée de Fourier de la densité $\rho_{N\alpha N}(\vec{r}) = \varphi_{N\alpha}^*(\vec{r}) \varphi_N(\vec{r})$, et les fonctions $\varphi_N(\vec{r})$ sont les états propres à 1 nucléon, avec la valeur propre E_N . Pour calculer B nous supposons que les états individuels $\varphi_N(\vec{r})$ sont des fonctions d'onde d'oscillateur harmonique. Et nous allons déterminer une énergie cinétique moyenne $\bar{K}_N$ et une énergie d'excitation moyenne $\bar{E}_N$ de telle sorte que nous puissions utiliser les relations de fermeture. Nous avons :

$$B_I = \sum_N \frac{\rho_{N\alpha N}(\vec{q}_f - \vec{q}_n) \rho_{NN\alpha}(\vec{q}_n - \vec{q}_i)}{E^+ - M - (E_N - E_{N\alpha}) - \omega_{q_n}}$$

$$\text{Or } \frac{1}{E^+ - M - (E_N - E_{N\alpha}) - \omega_{q_n}} \approx \frac{1}{E^+ - M - (\bar{E}_N - E_{N\alpha}) - \omega_{q_n}} \left[1 + \frac{E_N - \bar{E}_N}{E^+ - M - (\bar{E}_N - E_{N\alpha}) - \omega_{q_n}} \right]$$

En utilisant les relations de fermeture sur les états $\varphi_N(\vec{r})$ et les propriétés de l'oscillateur harmonique nous obtenons :

$$\sum_N \rho_{N\alpha N}(\vec{q}_f - \vec{q}_n) \rho_{NN\alpha}(\vec{q}_n - \vec{q}_i) = \rho_{N\alpha N\alpha}(\vec{q}_f - \vec{q}_i)$$

$$\sum_N \rho_{N\alpha N}(\vec{q}_f - \vec{q}_n) E_N \rho_{NN\alpha}(\vec{q}_n - \vec{q}_i) = \left[E_{N\alpha} - \frac{(\vec{q}_n - \vec{q}_i) \cdot (\vec{q}_f - \vec{q}_n)}{2m} \right] \rho_{N\alpha N\alpha}(\vec{q}_f - \vec{q}_i)$$

D'où :

$$B_I = \frac{\rho_{N\alpha N\alpha}(\vec{q}_f - \vec{q}_i)}{E^+ - M - (\bar{E}_N - E_{N\alpha}) - \omega_{q_n}} \left[1 + \frac{E_{N\alpha} - \bar{E}_N - \frac{(\vec{q}_n - \vec{q}_i) \cdot (\vec{q}_f - \vec{q}_n)}{2m}}{E^+ - M - (\bar{E}_N - E_{N\alpha}) - \omega_{q_n}} \right]$$

De même nous obtenons pour B_{II}

$$B_{II} = \sum_{\vec{P}_n} \frac{\varphi_{N\alpha}^*(\vec{P}_n + \vec{q}_n - \vec{q}_f) \varphi_{N\alpha}(\vec{P}_n + \vec{q}_n - \vec{q}_i)}{E^+ - M_n - m - \frac{P_n^2}{2m} - \omega_{q_n}}$$

$$\text{Or } \frac{1}{E'^+ - M_n - m - \frac{P_n^2}{2m} - \omega_{q_n}} \approx \frac{1}{E'^+ - M_n - m - \bar{K}_N - \omega_{q_n}} \left[1 + \frac{\frac{P_n^2}{2m} - \bar{K}_N}{E'^+ - M_n - m - \bar{K}_N - \omega_{q_n}} \right]$$

$$\text{et } I = \int d\vec{p}_n \varphi_{N\alpha}^* (\vec{p}_n + \vec{q}_n - \vec{q}_f) \frac{P_n^2}{2m} \varphi_{N\alpha} (\vec{p}_n + \vec{q}_n - \vec{q}_i) = \left[E_{N\alpha} - \frac{(\vec{q}_n - \vec{q}_i) \cdot (\vec{q}_f - \vec{q}_n)}{2m} \right] \rho_{N\alpha N\alpha} (\vec{q}_f - \vec{q}_i) \\ + \frac{m\omega^2}{2} \Delta (\vec{q}_f - \vec{q}_i) \rho_{N\alpha N\alpha} (\vec{q}_f - \vec{q}_i)$$

Pour calculer le dernier terme nous supposons que le facteur de forme de l'état N_α peut être approché par une gaussienne. Nous obtenons alors, si $\langle r^2 \rangle$ est le rayon moyen^α carré de cet état :

$$\rho_{N\alpha N\alpha} (\vec{q}) = e^{-\frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{6}} \\ \Delta_q \rho_{N\alpha N\alpha} (\vec{q}) = \langle r^2 \rangle \left(\frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{9} - 1 \right) e^{-\frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{6}}$$

En utilisant les propriétés de l'oscillateur harmonique :

$$\frac{m \omega^2 \langle r^2 \rangle}{2} = \frac{E_{N\alpha}}{2}$$

nous obtenons donc :

$$I = \left[\frac{E_{N\alpha}}{2} \left(1 + \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2 \langle r^2 \rangle}{9} \right) - \frac{(\vec{q}_n - \vec{q}_i) \cdot (\vec{q}_f - \vec{q}_n)}{2m} \right] \rho_{N\alpha N\alpha} (\vec{q}_i - \vec{q}_f)$$

et

$$B_{II} = \frac{\rho_{N\alpha N\alpha} (\vec{q}_i - \vec{q}_f)}{E'^+ - M_n - m - \bar{K}_N - \omega_{q_n}} \left[1 + \frac{\frac{E_{N\alpha}}{2} \left(1 + \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2 \langle r^2 \rangle}{9} \right) - \frac{(\vec{q}_n - \vec{q}_i) \cdot (\vec{q}_f - \vec{q}_n)}{2m} - \bar{K}_N}{E'^+ - M_n - m - \bar{K}_N - \omega_{q_n}} \right]$$

Pour déterminer $\bar{E}_N$ et $\bar{K}_N$ nous effectuons l'intégration angulaire sur $\vec{q}_n$ en tenant compte de la dépendance angulaire de τ .

$$\int d\Omega_{\vec{q}_n} (\vec{q}_f \cdot \vec{q}_n) (\vec{q}_n \cdot \vec{q}_i) \left[E_{N\alpha} - \bar{E}_N - \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_n) \cdot (\vec{q}_n - \vec{q}_f)}{2m} \right] = \frac{4\pi}{3} q_n^2 (\vec{q}_i \cdot \vec{q}_f) \left[E_{N\alpha} - \bar{E}_N + \frac{q_n^2}{2m} + \frac{\vec{q}_i \cdot \vec{q}_f}{2m} \right]$$

$$\int d\Omega_{\vec{q}_n} (\vec{q}_f \cdot \vec{q}_n) (\vec{q}_n \cdot \vec{q}_i) \left[\frac{E_{N\alpha}}{2} \left(1 + \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2 \langle r^2 \rangle}{9} \right) - \bar{K}_N - \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_n) \cdot (\vec{q}_n - \vec{q}_f)}{2m} \right]$$

$$= \frac{4\pi}{3} q_n^2 (\vec{q}_i \cdot \vec{q}_f) \left[\frac{E_{N\alpha}}{2} \left(1 + \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2 \langle r^2 \rangle}{9} \right) - \bar{K}_N + \frac{q_n^2 + \vec{q}_i \cdot \vec{q}_f}{2m} \right]$$

Si nous choisissons donc

$$\bar{E}_N = E_{N\alpha} + \frac{q_n^2 + \vec{q}_i \cdot \vec{q}_f}{2m}$$

$$\bar{K}_N = \frac{E_{N\alpha}}{2} \left[1 + \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2 \langle r^2 \rangle}{9} \right] + \frac{q_n^2 + \vec{q}_i \cdot \vec{q}_f}{2m}$$

L'élément de matrice A s'écrit

$$A = \rho_{N\alpha N\alpha} (\vec{q}_i - \vec{q}_f) \sum_{\vec{q}_n} \langle \vec{q}_f | \tau(E' - M_n) | \vec{q}_n \rangle \langle \vec{q}_n | \tau(E' - M_n) | \vec{q}_i \rangle$$

$$\times \left[\frac{1}{E' - M - (\bar{E}_N - E_\alpha) - \omega_{q_n}} - \frac{1}{E' - M_n - m - \bar{K}_N - \omega_{q_n}} \right]$$

Et il est identiquement nul, quel que soit q_n si nous choisissons :

$$E' = E + E_\alpha + \frac{E_{N\alpha}}{2} \left[1 + \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2 \langle r^2 \rangle}{9} \right]$$

où - E_α est l'énergie de liaison du nucléon α , tandis que $E_{N\alpha}$ est la valeur propre de l'état ${}^\alpha N$ de l'oscillateur harmonique. En utilisant le paramètre $\nu = m\omega$ de l'oscillateur harmonique nous arrivons à l'expression :

$$E' = E + E_\alpha + (2n + \ell + \frac{3}{2}) \frac{\nu}{2m} + (2n + \ell + \frac{3}{2})^2 \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2}{18m}$$

dans le cas où le nucléon α appartient à la couche $(n \ell)$ de l'oscillateur harmonique . Pour cette valeur de E' l'équation intégrale satisfaite par t se réduit à

$$t_\alpha(E) = \tau'_\alpha(E')$$

VI.2.D Conclusion

Nous avons donc déterminé deux corrections possibles à l'approximation d'impulsion. La première, valable dans le centre de masse pion-nucléon est sans doute correcte, mais elle fait intervenir un paramètre $\bar{E}_N$ dont l'estimation est difficile. Dans la suite cette correction sera appelée (A) et nous l'appliquerons en supposant que $\bar{E}_N$ est constant et égal à l'énergie de liaison du nucléon. La seconde, que nous appellerons (B), fait appel à un modèle et à certaines approximations plus ou moins valables, mais elle offre l'avantage d'être bien déterminée et de s'appliquer dans le système du laboratoire pion-nucléon. L'importance de ces corrections est très grande, dans les deux cas, puisque l'interaction nucléon-cœur a pour effet d'augmenter d'environ 45 Mev l'énergie du système π -nucléon dans la cinématique à 3 corps. On voit facilement que, comparé à la cinématique des particules libres, cet effet est plus faible mais qu'il est encore de l'ordre d'une vingtaine de Mev.

VII - CALCUL DU POTENTIEL OPTIQUE

VII.1 Premier Ordre

Nous allons maintenant utiliser ce qui précède pour calculer effectivement le potentiel optique π -noyau au premier ordre, c'est à dire que nous négligeons l'effet des excitations nucléaires et des échanges de charge. Nous obtenons ainsi l'approximation de diffusion cohérente soit :

$$\langle \vec{q}_f i | V^I(E) | \vec{q}_i i \rangle = (A-1) \langle 0 \vec{P}_f, \vec{q}_f i | t(E) | \vec{q}_i i, 0 \vec{P}_i \rangle$$

avec	$\vec{q}_f, \vec{q}_i$	moments final et initial du pion
	$\vec{P}_f, \vec{P}_i$	" " " du noyau
	i	isospin " " du pion
	E	énergie totale du système π -Noyau dans la réaction

En utilisant la description choisie pour le noyau :

$$|0 \vec{P}\rangle = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\substack{n \alpha \\ \vec{P}_n \vec{p}_\alpha}} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_A + \vec{P}_n - \vec{P}) \varphi_{n\alpha} \left(\frac{\vec{p}_\alpha - \eta \vec{P}_n}{1+\eta} \right) |\vec{p}_\alpha \alpha\rangle |n \vec{P}_n\rangle$$

le potentiel s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_f i | V^I(E) | \vec{q}_i i \rangle &= \frac{A-1}{A} \sum_{\substack{n n' \alpha \alpha' \\ \vec{P}_n \vec{P}'_n, \vec{p}_\alpha \vec{p}'_\alpha}} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_\alpha + \vec{P}_n - \vec{P}_i) \delta(\vec{p}'_\alpha + \vec{P}'_n - \vec{P}_f) \\ &\varphi_{n', \alpha'}^* \left(\frac{\vec{P}'_\alpha - \eta \vec{P}'_n}{1+\eta} \right) \varphi_{n\alpha} \left(\frac{\vec{p}_\alpha - \eta \vec{P}_n}{1+\eta} \right) \langle n' \vec{P}'_n, \alpha' \vec{p}'_\alpha, q_f i | t(E) | \vec{q}_i i, \alpha \vec{p}_\alpha, n \vec{P}_n \rangle \end{aligned}$$

Or nous avons vu que la matrice $t(E)$ est approximativement diagonale par rapport aux états du coeur, et que ses éléments de matrice sont reliés à ceux de la matrice de diffusion π -nucléon libre à une énergie différente : E_{eff} . Suivant les approximations que nous ferons, nous aurons :

$$E_{\text{eff}}^n = E - M_n - \frac{P_n^2}{2M_n} \quad \text{dans le cas de l'approximation d'impulsion}$$

$$E_{\text{eff}}^n = E - M_n - \frac{P_n^2}{2M_n} + \Delta E^n, \quad \text{si nous appliquons la correction (B) à l'approximation}$$

d'impulsion.

Il faut remarquer que dans tous les cas l'énergie effective dépend de l'état du coeur, et donc de la couche occupée par le nucléon α dans l'état fondamental. Nous obtenons donc :

$$\langle \vec{q}_f i | V^I(E) | \vec{q}_i i \rangle = \frac{A-1}{A} \sum_{\substack{n \vec{p}_n \\ \alpha \alpha' \\ \vec{p}_\alpha \vec{p}'_\alpha}} \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_\alpha + \vec{p}_n - \vec{p}_i) \delta(\vec{p}'_\alpha + \vec{p}_n - \vec{p}_f) \varphi_{n\alpha}^* \left(\frac{\vec{p}'_\alpha - \eta \vec{p}_n}{1+\eta} \right) \varphi_{n\alpha} \left(\frac{\vec{p}_\alpha - \eta \vec{p}_n}{1+\eta} \right)$$

$$\langle \vec{p}'_\alpha \alpha', \vec{q}_f i | \tau(E_{\text{eff}}) | \vec{q}_i i, \vec{p}_\alpha \alpha \rangle$$

En utilisant ensuite la conservation de l'impulsion dans la matrice τ π -nucléon :

$$\langle \vec{p}'_\alpha \alpha', \vec{q}_f i | \tau(E_{\text{eff}}) | \vec{q}_i i, \vec{p}_\alpha \alpha \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_\alpha + \vec{q}_i - \vec{p}'_\alpha - \vec{q}_f) \langle \vec{p}'_\alpha \alpha', \vec{q}_f i | h(E_{\text{eff}}) | \vec{q}_i i, \vec{p}_\alpha \alpha \rangle$$

Le potentiel devient :

$$\langle \vec{q}_f i | V^I(E) | \vec{q}_i i \rangle = \frac{A-1}{A} \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f - \vec{p}_i - \vec{q}_i) \sum_{\substack{n \alpha \alpha' \\ \vec{p}_\alpha}} \varphi_{n\alpha}^* \left(\vec{p}_\alpha + \vec{q}_i - \vec{q}_f - \frac{\eta}{1+\eta} \vec{p}_f \right) \varphi_{n\alpha} \left(\vec{p}_\alpha - \frac{\eta}{1+\eta} \vec{p}_i \right)$$

$$\langle \vec{p}_\alpha + \vec{q}_i - \vec{q}_f \alpha', \vec{q}_f i | h(E_{\text{eff}}) | \vec{q}_i i, \vec{p}_\alpha \alpha \rangle$$

En se plaçant dans le système du centre de masse pion-noyau et en prenant l'impulsion totale π -nucléon comme variable d'intégration nous obtenons :

$$\langle \vec{q}_f i | V^I(E) | \vec{q}_i i \rangle = \frac{A-1}{A} \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f) \sum_{\substack{n \alpha \alpha' \\ \vec{P}}} \varphi_{n\alpha}^* \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_f}{1+\eta} \right) \varphi_{n\alpha} \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_i}{1+\eta} \right)$$

$$\langle \vec{P} - \vec{q}_f \alpha', \vec{q}_f i | h(E_{\text{eff}}^n) | \vec{q}_i i, \vec{P} - \vec{q}_i \alpha \rangle$$

où

$$E_{\text{eff}}^n = E - M_n - \frac{\vec{P}^2}{2M_n} + (\Delta E)$$

A ce stade il est clair que nous avons besoin des éléments de matrice de $h(E)$ dans le système du laboratoire. Si toutes les particules étaient sur couche de masse, et si l'énergie était conservée, ce problème serait facile à résoudre en utilisant les amplitudes invariantes que l'on sait calculer dans le système du centre de masse. Dans notre cas nous avons deux difficultés à surmonter : d'une part définir le système du centre de masse π -nucléon, d'autre part étendre la matrice τ π -nucléon hors couche de masse.

Pour définir le passage au système du centre de masse π -nucléon, nous supposons que l'énergie est conservée dans la collision π -nucléon :

$$\epsilon_\pi^i + \epsilon_N^i = \epsilon_\pi^f + \epsilon_N^f = E_{\text{eff}}^n$$

L'impulsion totale étant conservée, l'énergie dans le système du centre de masse est bien définie par :

$$W^2 = E_{\text{eff}}^2 - \vec{P}^2$$

Pour déterminer ensuite les impulsions $\vec{p}_i$ et $\vec{p}_f$ dans le centre de masse, il ne reste qu'à appliquer cette transformation au pion ou au nucléon. Cependant il faut déterminer l'énergie

de ces particules, ou, ce qui revient au même, leur masse effective, de telle sorte que l'on ait conservation de l'énergie.

Dans le cas de l'approximation d'impulsion, le nucléon est dans un état propre d'énergie $\epsilon_N^i = \epsilon_N^f = m - E_0$ où $-E_0$ est l'énergie de liaison du nucléon. (On doit remarquer que cette valeur ne tient pas compte de l'énergie cinétique d'entraînement, ce qui est légitime puisqu'elle est de l'ordre de $\frac{m}{M} \cdot \frac{q_i^2}{2M}$). On en déduit donc la masse effective du nucléon dans les états initial et final :

$$m_i^2 = \epsilon_N^i - (\vec{P} - \vec{q}_i)^2$$

$$m_f^2 = \epsilon_N^f - (\vec{P} - \vec{q}_f)^2$$

L'énergie du pion et sa masse effective s'en déduisent simplement :

$$\epsilon_\pi^i = \epsilon_\pi^f = E_{\text{eff}} - \epsilon_N^i$$

et

$$\mu_i^2 = (\epsilon_\pi^i)^2 - \vec{q}_i^2$$

$$\mu_f^2 = (\epsilon_\pi^f)^2 - \vec{q}_f^2$$

Avec ces définitions le passage au centre de masse s'effectue facilement et l'on a :

$$p_i = \frac{1}{2W} \left[(W^2 - (m_i + \mu_i)^2) (W^2 - (m_i - \mu_i)^2) \right]^{1/2}$$

$$p_f = \frac{1}{2W} \left[(W^2 - (m_f + \mu_f)^2) (W^2 - (m_f - \mu_f)^2) \right]^{1/2}$$

Le produit scalaire $\vec{p}_i \cdot \vec{p}_f$ se détermine aussi simplement en calculant le produit scalaire des quadrivecteurs : $(\vec{q}_i, \epsilon_\pi^i)$ et $(\vec{q}_f, \epsilon_\pi^f)$ dans le centre de masse et dans le laboratoire.

Le produit vectoriel $\vec{p}_i \wedge \vec{p}_f$ pourrait se calculer, moins simplement en appliquant la transformation de Lorentz au tenseur antisymétrique de rang 2 $\{ p_i^j p_f^k - p_i^k p_f^j \}$.

Note : Si l'on apporte une correction à l'approximation d'impulsion la cinématique n'est pas modifiée si l'on s'intéresse à la correction (A) valable dans le centre de masse π -nucléon.

Il suffit en effet de remplacer W par $W' = W + (E_\alpha - \bar{E}_N) + \frac{(W + E_\alpha - \bar{E}_N - m)^2 - \mu^2}{2m}$. Par contre,

si l'on s'intéresse à la correction (B) valable dans le laboratoire, on remplace E par $E + \Delta E$ et l'on attribue ce supplément d'énergie au nucléon :

$$E_{\text{eff}} = E - M_n - \frac{\vec{p}^2}{2M_n} + E_\alpha + (2n+l+\frac{3}{2}) \frac{v}{2m} + (2n+l+\frac{3}{2})^2 \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2}{18m}$$

$$\epsilon_N^i = \epsilon_N^f = m + (2n+l+\frac{3}{2}) \frac{v}{2m} + (2n+l+\frac{3}{2})^2 \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2}{18m}$$

et le reste de la cinématique reste inchangé.

*Note : Cette transformation n'est pas complètement covariante, en particulier puisque nous supposons que le spin du nucléon est invariant par translation. Pour être complètement covariant il faudrait faire appel aux spineurs de Dirac, et remplacer $\sigma \cdot \vec{p} \wedge \vec{q}$ par $(S_{\mu\nu} p_\mu q_\nu) \dots$. Cependant dans le domaine d'énergie considéré les effets relativistes autre que cinématiques sont certainement faibles et nous n'en tenons pas compte.

Le passage du laboratoire au centre de masse peut donc s'effectuer puisque nous en connaissons tous les éléments ; en utilisant les amplitudes invariantes nous obtenons alors :

$$\langle \vec{P}-\vec{q}_f \alpha', \vec{q}_f i | h(E_{\text{eff}}) | \vec{q}_i i, \vec{P}-\vec{q}_i \alpha \rangle = \sqrt{\frac{(\epsilon_{\pi}^i \epsilon_{\pi}^f \epsilon_N^i \epsilon_N^f) C.M.}{\epsilon_{\pi}^i \epsilon_{\pi}^f \epsilon_N^i \epsilon_N^f}} \langle \vec{p}_f, \alpha' i | \tau(W) | \vec{p}_i, \alpha i \rangle$$

On doit remarquer que l'élément de matrice de τ que nous devons évaluer dans le centre de masse n'est connu que si les particules sont sur couche de masse, c'est à dire si l'on a :

$$W = \sqrt{p_f^2 + \mu^2} + \sqrt{p_i^2 + m^2} = \sqrt{p_i^2 + \mu^2} + \sqrt{p_i^2 + m^2}$$

Ceci n'est pas vrai dans notre cas, mais nous supposons que la forme choisie pour la matrice τ décrit correctement la diffusion hors couche de masse. Dans ces conditions :

$$\langle \vec{p}_f \alpha' i | \tau(W) | \vec{p}_i \alpha i \rangle = F(p_f) D(W) F(p_i) \langle \alpha' i | P_{3/2} T_{3/2} | \alpha i \rangle$$

où $F(p)$ est le facteur de forme et $D(W)$ de propagateur de la résonance. Dans ces conditions le potentiel optique s'écrit :

$$\langle \vec{q}_f i | V^I(E) | \vec{q}_i i \rangle = \frac{A-1}{A} \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f) \sum_{n \alpha \alpha'} \int d\vec{P} \varphi_{n\alpha}^* (\vec{P} - \frac{\vec{q}_f}{1+\eta}) \varphi_{n\alpha} (\vec{P} - \frac{\vec{q}_i}{1+\eta})$$

$$H(E, \vec{q}_i, \vec{q}_f, \vec{P}, n) \langle \alpha' i | P_{3/2} T_{3/2} | \alpha i \rangle$$

En explicitant la dépendance des fonctions d'onde relatives en spin et isospin, et en utilisant la conservation de la charge qui interdit tout échange de charge nous obtenons :

$$\langle \vec{q}_f i | V^I(E) | \vec{q}_i i \rangle = \frac{A-1}{A} \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f) \sum_{n \ell j m \in 0} \sum_{\mu \mu' s, s'; t} \int d\vec{P} H(E, \vec{q}_i, \vec{q}_f, \vec{P}, n \ell j m t)$$

$$\varphi_{n \ell \mu}^* (\vec{P} - \frac{\vec{q}_f}{1+\eta}) \varphi_{n \ell \mu} (\vec{P} - \frac{\vec{q}_i}{1+\eta}) \langle \ell \mu \frac{1}{2} s | j m \rangle \langle j m | \ell \mu' \frac{1}{2} s' \rangle$$

$$\langle s' | 2 \vec{p}_i \cdot \vec{p}_f - i \vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_f \wedge \vec{p}_i) | s \rangle \langle i t | T_{3/2} | i t \rangle$$

On voit facilement dans cette expression que le terme de spin flip s'annule dans le cas où le noyau est à double couche fermée, puisque, alors, la sommation porte sur $j = \ell + \frac{1}{2}$ et $j = \ell - \frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\sum_{\substack{s s' \\ j m}} \langle \ell \mu \frac{1}{2} s | j m \rangle \langle j m | \ell \mu' \frac{1}{2} s' \rangle \langle s' | \vec{\sigma} | s \rangle = \sum_s \langle s | \vec{\sigma} | s \rangle = 0$$

Nous montrons par ailleurs (Appendice A1) que, dans le cadre de l'approximation statique, le terme de spin-flip s'annule pour un noyau de spin nul. Nous montrons aussi que la contribution du terme de spin-flip due au mouvement de Fermi est très faible, ce qui nous autorise à le négliger. Si de plus nous supposons que les f.o. sont identiques pour les neutrons et les protons nous obtenons :

$$\langle \vec{q}_f i | V^I(E) | \vec{q}_i i \rangle = \frac{A-1}{A} \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f) \sum_{n\ell j} \sum_{\mu\mu' m s} \langle \ell \mu \frac{1}{2} s | j m \rangle \langle j m | \ell \mu' \frac{1}{2} s \rangle \left(1 + \frac{1}{3}\right) \int d\vec{P}$$

$$\varphi_{n\ell\mu}^* \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_f}{1+\eta} \right) \varphi_{n\ell\mu} \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_i}{1+\eta} \right) 2 \vec{p}_i \cdot \vec{p}_f \quad H(E, \vec{q}_i, \vec{q}_f, \vec{P}, n, \ell, j)$$

$$= \frac{A-1}{A} \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \sum_{n\ell j} \frac{2j+1}{4\pi} \int d\vec{P} 2 \vec{p}_i \cdot \vec{p}_f \quad H(E, \vec{q}_i, \vec{q}_f, \vec{P}, n, \ell, j)$$

$$\varphi_{n\ell}^* \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_f}{1+\eta} \right) \varphi_{n\ell} \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_i}{1+\eta} \right) P_\ell \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_f}{1+\eta}, \vec{P} - \frac{\vec{q}_i}{1+\eta} \right)$$

En particulier, dans le cas du ^{12}C décrit dans le modèle des couches comme 4-nucléons dans la couche $1S_{1/2}$ et 8 nucléons dans la couche $1P_{3/2}$, nous obtenons une forme assez simple pour l'expression du potentiel optique. Avec des fonctions d'onde d'oscillateur harmonique, celui-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_f i | V^I(E) | \vec{q}_i i \rangle &= \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f) \times \frac{11}{12} 2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{4\pi}{v}\right)^{3/2} e^{-1/4v \left(\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{1+\eta} \right)^2} \\ &\times \int d\vec{P} e^{-\frac{1}{v} \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_i + \vec{q}_f}{2(1+\eta)} \right)^2} 2 \vec{p}_i \cdot \vec{p}_f \left\{ H(E, \vec{q}_i, \vec{q}_f, \vec{P}, n = \ell = 0) \right. \\ &\left. + \frac{1}{3v} \left[4 \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_i + \vec{q}_f}{2(1+\eta)} \right)^2 - \left(\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{1+\eta} \right)^2 \right] H(E, \vec{q}_i, \vec{q}_f, \vec{P}, n = 0, \ell = 1, j = \frac{3}{2}) \right\} \end{aligned}$$

Cette expression peut nous suggérer quelques remarques.

D'une part on peut y voir une justification de l'approximation statique puisque la dépendance

en $\vec{P}$ est probablement gouvernée par l'exponentielle : $e^{-\frac{1}{v} \left[\vec{P} - \frac{\vec{q}_i + \vec{q}_f}{2(1+\eta)} \right]^2}$. Or, à la limite v assez petit on peut écrire :

$$\left(\frac{1}{\pi v}\right)^{3/2} e^{-k^2/v} \approx \delta(\vec{k})$$

$$\left(\frac{1}{\pi v}\right)^{3/2} \frac{2k^2}{3v} e^{-k^2/v} \approx \frac{\delta(k - \sqrt{v})}{k^2} \approx \delta(\vec{k})$$

Et le potentiel optique s'écrit alors :

$$\langle \vec{q}_f i | V^I(E) | \vec{q}_i i \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f) \frac{11}{12} e^{-\frac{1}{4\nu} \left(\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{1+\eta} \right)^2} \left[3 - \frac{1}{3\nu} \left(\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{1+\eta} \right)^2 \right]$$

$$\times \sum_{s,t} \langle \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2} s t, \vec{q}_f i | h(E_{eff}) | \vec{q}_i i, \frac{\vec{q}_f - \vec{q}_i}{2} s t \rangle$$

Cette expression est très voisine de celle employée couramment, si l'on se place à faible moment de transfert. Par contre, en ce qui concerne la diffusion vers l'arrière ou loin de la couche de masse, le mouvement du nucléon ne peut plus être négligé sans faire une erreur importante sur l'évaluation de l'élément de matrice de $h(E_{eff})$. On peut d'autre part remarquer que le fait de tenir compte de la conservation de l'impulsion dans la description du noyau, revient grossièrement à remplacer le moment de transfert $\vec{q} = \vec{q}_i - \vec{q}_f$ par $\vec{q}' = \frac{A-1}{A}(\vec{q}_i - \vec{q}_f)$ dans le facteur de forme nucléaire.

On voit donc que l'on retrouve la correction de Gartenhaus Schwartz, qui consiste à multiplier le potentiel par $e^{-\left(\frac{q^2}{2\nu A}\right)}$ pour tenir compte de la conservation de l'impulsion.

VII.2 Second ordre

Nous nous intéressons maintenant au deuxième ordre du potentiel optique, c'est à dire au terme qui tient compte des excitations nucléaires et des échanges de charge. Il s'écrit :

$$\langle \vec{q}_f i | V^{II}(E) | \vec{q}_i i \rangle = (A-1)^2 \langle 0 | \vec{p}_f, \vec{q}_f i | t(E)(1-\pi_0)G_0^+(E)t(E) | \vec{q}_i i, 0 | \vec{p}_i \rangle$$

où $G_0^+(E)$ est le propagateur libre du pion et du noyau, et où π_0 est le projecteur sur l'état nucléaire fondamental. Le formalisme étant assez lourd, nous n'explicitons pas tous les calculs. Cependant il est facile de voir que dans un tel processus on ne peut exciter le "cœur", puisque l'opérateur $t(E)$ le laisse invariant et que seul $G_0^+(E)$ n'est pas diagonal par rapport aux états du cœur (f.o antisymétrisés). Il faudrait donc, puisque l'état fondamental est interdit dans l'état intermédiaire, considérer l'ordre supérieur du potentiel optique pour obtenir un processus avec excitation du "cœur". Nous n'aurons ainsi à considérer que les éléments de matrice de $(1-\pi_0)G_0^+(E)$ de la forme :

$$\langle n | \vec{p}'_n, \alpha' | \vec{p}'_\alpha \rangle \langle \vec{p}_\alpha, n | \vec{p}_n \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\substack{\vec{p}_N \\ N \neq 0}} \langle n | \vec{p}'_n, \alpha' | N \vec{p}_N \rangle G_0^+(E-E_N) \langle N \vec{p}_N | \vec{p}_\alpha, n | \vec{p}_n \rangle$$

En faisant l'approximation de fermeture sur les états nucléaires intermédiaires, l'élément de matrice précédent devient :

$$\langle (1-\pi_0)G_0^+(E) \rangle = G_0^+(E-\overline{E}_N) (2\pi)^3 \delta(\vec{p}'_n - \vec{p}_n) (2\pi)^3 \delta(\vec{p}'_\alpha - \vec{p}_\alpha) \delta_{\alpha\alpha'}$$

$$- (2\pi)^3 \delta(\vec{p}'_\alpha + \vec{p}_n - \vec{p}'_n - \vec{p}_\alpha) G_0^+(E) \sum_{n\alpha \in 0} \varphi_{n\alpha} \left(\frac{\vec{p}'_\alpha - \eta \vec{p}'_n}{1+\eta} \right) \varphi_{n\alpha}^* \left(\frac{\vec{p}_\alpha - \eta \vec{p}_n}{1+\eta} \right)$$

où $\overline{E}_N$ est l'énergie moyenne d'excitation dans l'état intermédiaire. Le deuxième terme de

cette expression provient du fait que l'on interdit, en raison du principe de Pauli, tous les états occupés à 1 particule, et l'état fondamental. Ainsi le second ordre se compose de deux termes dont le second seulement est sensible aux corrélations dans le noyau ; ceux-ci s'écrivent, en omettant les sommes sur les spins et isospins et en négligeant l'énergie cinétique du noyau :

$$\langle \vec{q}_f | V^{\text{II}}(E) | \vec{q}_i \rangle_1 = \frac{(A-1)^2}{A} \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f - \vec{p}_i - \vec{q}_i) \sum_{\vec{p}_i, \vec{q}_n} \frac{1}{E^+ - M - \bar{E}_{N-q_n}} \rho \left(\vec{p}_i + \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{1+\eta}, \vec{p}_i - \frac{\eta \vec{p}_i}{1+\eta} \right)$$

$$\langle \vec{p}_i + \vec{q}_i - \vec{q}_f, \vec{q}_f | h(E_{\text{eff}}^N) | \vec{q}_n, \vec{p}_i + \vec{q}_i - \vec{q}_n \rangle = \langle \vec{p}_i + \vec{q}_i - \vec{q}_n, \vec{q}_n | h(E_{\text{eff}}^N) | \vec{q}_i, \vec{p}_i \rangle$$

$$\langle \vec{q}_f | V^{\text{II}}(E) | \vec{q}_i \rangle_2 = -(A-1)^2 \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f - \vec{p}_i - \vec{q}_i) \sum_{\vec{p}_i, \vec{p}_f, \vec{q}_n} \frac{1}{E^+ - M - \omega_{q_n}} \rho(\vec{p}_f - \frac{\eta}{1+\eta} \vec{p}_f, \vec{p}_i - \frac{\eta}{1+\eta} \vec{p}_i)$$

$$\rho(\vec{p}_i + \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_n}{1+\eta} - \frac{\eta}{1+\eta} \vec{p}_i, \vec{p}_f + \frac{\vec{q}_f - \vec{q}_n}{1+\eta} - \frac{\eta}{1+\eta} \vec{p}_f) \langle \vec{p}_f, \vec{q}_f | h(E_{\text{eff}}^0) | \vec{q}_n, \vec{p}_f + \vec{q}_f - \vec{q}_n \rangle = \langle \vec{p}_i + \vec{q}_i - \vec{q}_n, \vec{q}_n | h(E_{\text{eff}}^0) | \vec{q}_i, \vec{p}_i \rangle$$

Dans cette expression $\rho(\vec{k}, \vec{k}')$ est la densité à 1 particule dans le fondamental

$$\rho(\vec{k}, \vec{k}') = \int d\vec{r} d\vec{r}' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} \prod_{i \neq 1}^A d\vec{r}_i \Psi^*(\vec{r}, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) \Psi(\vec{r}', \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)$$

et, E_{eff}^N est l'énergie effective du système π -nucléon pour une transition du fondamental vers un état excité, tandis que E_{eff}^0 correspond à une transition de fondamental à fondamental. Pour poursuivre le calcul nous utiliserons l'approximation statique, c'est à dire que nous négligerons le moment du nucléon dans l'évaluation des éléments de matrice de $h(E)$. En pratique nous utiliserons deux sortes d'approximations différentes :

a) Dans l'une nous supposons que, comme dans le cas du 1er ordre, le moment du nucléon contribuant principalement à la diffusion est égal au demi moment de transfert $\frac{1}{2}$; nous aurons alors :

$$\text{Dans } V_1^{\text{II}} : \langle \vec{p}_i + \vec{q}_i - \vec{q}_f, \vec{q}_f | h(E_{\text{eff}}^N) | \vec{q}_n, \vec{p}_i + \vec{q}_i - \vec{q}_n \rangle \approx \langle \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2}, \vec{q}_f | h(E_{\text{eff}}^N) | \vec{q}_n, \frac{\vec{q}_i + \vec{q}_f - 2\vec{q}_n}{2} \rangle$$

$$\langle \vec{p}_i + \vec{q}_i - \vec{q}_n, \vec{q}_n | h(E_{\text{eff}}^N) | \vec{q}_i, \vec{p}_i \rangle \approx \langle \frac{\vec{q}_i + \vec{q}_f - 2\vec{q}_n}{2}, \vec{q}_n | h(E_{\text{eff}}^N) | \vec{q}_i, \frac{\vec{q}_f - \vec{q}_i}{2} \rangle$$

$$\text{Dans } V_2^{\text{II}} : \langle \vec{p}_f, \vec{q}_f | h(E_{\text{eff}}^0) | \vec{q}_n, \vec{p}_f + \vec{q}_f - \vec{q}_n \rangle \approx \langle \frac{\vec{q}_n - \vec{q}_f}{2}, \vec{q}_f | h(E_{\text{eff}}^0) | \vec{q}_n, \frac{\vec{q}_f - \vec{q}_n}{2} \rangle$$

$$\langle \vec{p}_i + \vec{q}_i - \vec{q}_n, \vec{q}_n | h(E_{\text{eff}}^0) | \vec{q}_i, \vec{p}_i \rangle \approx \langle \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_n}{2}, \vec{q}_n | h(E_{\text{eff}}^0) | \vec{q}_i, \frac{\vec{q}_n - \vec{q}_i}{2} \rangle$$

b) Dans l'autre, au contraire nous supposons, comme l'on fait d'ordinaire, que le moment du nucléon est nul dans l'état initial ou final. Dans les deux cas, l'intégration sur $\vec{p}_i$ et $\vec{p}_f$ s'effectue simplement :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int d\vec{p}_f d\vec{p}_i \rho(\vec{p}_f - \frac{\eta}{1+\eta} \vec{q}_f, \vec{p}_i - \frac{\eta}{1+\eta} \vec{q}_i) \rho(\vec{p}_i + \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_n}{1+\eta} - \frac{\eta \vec{q}_i}{1+\eta}, \vec{p}_f + \frac{\vec{q}_f - \vec{q}_n}{1+\eta} - \frac{\eta}{1+\eta} \vec{q}_f) \\
&= \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rho(\vec{r}_2, \vec{r}_1) e^{i \frac{\vec{q}_f - \vec{q}_n}{1+\eta} \cdot \vec{r}_1} e^{-i \frac{\vec{q}_n - \vec{q}_i}{1+\eta} \cdot \vec{r}_2} e^{i \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{1+\eta} \cdot \vec{r}} \\
I_1 &= \int d\vec{p}_i \rho(\vec{p}_i + \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{1+\eta} - \frac{\eta}{1+\eta} \vec{q}_f, \vec{p}_i - \frac{\eta}{1+\eta} \vec{q}_i) = \int d\vec{r} \rho(\vec{r}, \vec{r}) e^{i \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{1+\eta} \cdot \vec{r}}
\end{aligned}$$

où $\rho(\vec{r}, \vec{r}')$ est la densité à 1 particule dans le fondamental.

On voit que dans I_2 intervient la fonction de corrélation dans le fondamental $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ définie par :

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) - \rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_2)$$

où $\rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int \prod_{i=3}^A d\vec{r}_i \Psi_0^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \Psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A)$ est la densité à deux particules. Dans le cas où l'on ne tient compte que des corrélations de Pauli celle-ci devient en effet :

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = - \rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rho(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

*Note : Rappelons que cette cinématique est due à la forme des fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique. On a en effet :

$$\begin{aligned}
I &= \int d\vec{k} \Psi_n^*(\vec{k} + \vec{q}_i - \vec{q}_f) \Psi_m(\vec{k}) \langle \vec{k} + \vec{q}_i - \vec{q}_f, \vec{q}_f | h(E) | \vec{q}_i, \vec{k} \rangle \\
&= \int d\vec{k} \Sigma C_{nm}^{NM} \Psi_N \left(\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{\sqrt{2}} \right) \Psi_M \left(\left(\vec{k} + \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2} \right) \sqrt{2} \right) \langle \vec{k} + \vec{q}_i - \vec{q}_f, \vec{q}_f | h(E) | \vec{q}_i, \vec{k} \rangle \\
&= \Sigma C_{nm}^{NM} \Psi_N \left(\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{\sqrt{2}} \right) \int d\vec{k} e^{-\frac{1}{v} \left[\vec{k} + \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2} \right]^2} P_M \left(\left(\vec{k} + \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2} \right) \sqrt{2} \right) \langle \vec{k} + \vec{q}_i - \vec{q}_f, \vec{q}_f | h(E) | \vec{q}_i, \vec{k} \rangle
\end{aligned}$$

Ainsi que nous l'avons vu la dépendance en $\vec{k}$ est probablement gouvernée par la gaussienne qui est assimilable à une distribution :

$$\left(\frac{1}{\pi v} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{v} \left[\vec{k} + \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2} \right]^2} = \delta \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}_f - \vec{q}_i}{2} \right)$$

et l'intégrale précédente devient :

$$I = \rho_{nm}(\vec{q}_i - \vec{q}_f) \langle \frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2}, \vec{q}_f | h(E) | \vec{q}_i, \frac{\vec{q}_f - \vec{q}_i}{2} \rangle$$

et I_2 s'écrit alors :

$$I_2 = - G \left(\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2(1+\eta)}, \frac{2\vec{q}_n - \vec{q}_i - \vec{q}_f}{2(1+\eta)} \right)$$

$$\text{avec } G(\vec{k}, \vec{q}) = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rho(\vec{r}_2, \vec{r}_1) e^{i\vec{k} \cdot \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}$$

On voit donc que l'on pourrait tenir compte des corrélations dynamiques en remplaçant cette fonction de corrélation statistique par une fonction plus élaborée. Cependant, étant données les approximations que nous ferons, nous n'avons pas jugé utile d'en tenir compte, d'autant plus que les moments de transfert que l'on peut atteindre dans cette gamme d'énergie sont faibles.

Pour poursuivre le calcul nous supposons de plus que les densités à une particule sont diagonales en spin et isospin et que l'on peut négliger les termes de spin-flip dans l'amplitude de diffusion π -nucléon. Avec cette approximation les sommes sur les spins et isospins s'effectuent simplement et l'on obtient :

$$\langle \vec{q}_f i | V^{II}(E) | \vec{q}_i i \rangle_1 = \delta(\vec{P}_f + \vec{q}_f - \vec{P}_i - \vec{q}_i) \frac{(A-1)^2}{A} \frac{2(1+1/3)}{4} \rho(\vec{q}_i - \vec{q}_f) \int d\vec{q}_n \frac{\langle |h| \rangle \langle |h| \rangle}{E^+ - \bar{E}_N - \omega_{q_n}}$$

$$\langle \vec{q}_f i | V^{II}(E) | \vec{q}_i i \rangle_2 = \delta(\vec{P}_f + \vec{q}_f - \vec{P}_i - \vec{q}_i) (A-1)^2 \frac{2(1+1/3)}{16} \int d\vec{q}_n G \left[\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2(1+\eta)}, \frac{2\vec{q}_n - \vec{q}_i - \vec{q}_f}{2(1+\eta)} \right] \frac{\langle |h| \rangle \langle |h| \rangle}{E^+ - \omega_{q_n}}$$

où les facteurs $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{16}$ ont été introduits pour que les densités à une particule restent normalisées à l'unité.

Enfin dans l'intégrale sur le moment intermédiaire du pion nous nous sommes limités à la partie polaire du propagateur. Cette approximation est sans doute assez mauvaise, puisque les effets de la diffusion hors couche sont importants, en particulier pour le 1er terme. Cependant on peut espérer ainsi obtenir un ordre de grandeur approximatif du second ordre.

Le calcul des éléments de matrice de t est ensuite effectué en utilisant la cinématique utilisée pour le calcul du 1er ordre et en utilisant la correction (A) à l'approximation d'impulsion. Le paramètre $\bar{E}_{NN}$ qui intervient dans cette correction a été pris égal à zéro dans le second terme qui décrit une transition du fondamental au fondamental et égal à $\bar{E}_N/2$ dans le premier qui décrit une transition depuis le fondamental vers un état excité d'énergie $\bar{E}_N$. D'autre part nous avons utilisé pour $\bar{E}_N$ la valeur que nous avons obtenue avec des fonctions d'onde d'oscillateur harmonique :

$$\bar{E}_N = - \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_n)(\vec{q}_n - \vec{q}_f)}{2m}$$

Remarques : 1) La forme de ce terme du second ordre peut encore se simplifier ce qui nous permettra d'estimer son ordre de grandeur comparé au terme du 1er ordre. En effet, en négligeant le moment des nucléons, la correction à l'approximation d'impulsion et le passage du centre de masse π -Noyau au centre de masse π -nucléon, les éléments de matrice de t peuvent s'écrire :

$$\langle \vec{k}', \vec{q}_n | t(E_{\text{eff}}) | \vec{q}_i, \vec{k} \rangle \approx \langle \vec{q}_i - \vec{q}_n, \vec{q}_n | t(E) | \vec{q}_i, \vec{0} \rangle$$

$$\approx F(q_n) D(E) F(q_i) 2\vec{q}_n \cdot \vec{q}_i$$

$$\text{et } \langle \vec{k}', \vec{q}_f | t(E_{\text{eff}}) | \vec{q}_n, \vec{k} \rangle \approx F(q_f) D(E) F(q_n) 2\vec{q}_f \cdot \vec{q}_n$$

avec $E = \omega_\pi + m$

Dans ces conditions l'intégration sur les angles de $\vec{q}_n$ s'effectue simplement pour le terme linéaire en ρ :

$$\int d\Omega_{\vec{q}_n} (\vec{q}_n \cdot \vec{q}_i) (\vec{q}_n \cdot \vec{q}_f) = 2\pi q_n^2 \vec{q}_i \cdot \vec{q}_f$$

Pour le terme dépendant des corrélations, nous adopterons une valeur moyenne $\langle \vec{q}_n \rangle$, de telle sorte que l'on ait :

$$\int d\Omega_{\vec{q}_n} G \left[\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2(1+\eta)}, \frac{2\vec{q}_n - (\vec{q}_i + \vec{q}_f)}{2(1+\eta)} \right] (\vec{q}_i \cdot \vec{q}_n) (\vec{q}_n \cdot \vec{q}_f) = G \left[\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2(1+\eta)}, \frac{2\langle \vec{q}_n \rangle - (\vec{q}_i + \vec{q}_f)}{2(1+\eta)} \right] 2\pi q_n^2 (\vec{q}_i \cdot \vec{q}_f)$$

Enfin, si l'on néglige l'énergie moyenne d'excitation du noyau dans l'état intermédiaire, la partie polaire du propagateur nous donne :

$$\frac{1}{E^+ - m - \omega_{q_n}} = -i\pi \delta[\omega_{q_n} - (E - m)] \approx -i\pi \delta \left[\sqrt{q_n^2 + \mu^2} + \sqrt{q_n^2 + m^2} - E \right]$$

et en utilisant la relation liant le facteur de forme et la largeur de la résonance π -N :

$$\frac{1}{2\pi} \int q_n^4 dq F^2(q) \delta(\sqrt{q^2 + \mu^2} + \sqrt{q^2 + m^2} - E) = \Gamma(E)$$

nous obtenons :

$$V^{II}(\vec{q}_f, \vec{q}_i, E) \approx -i(A-1)^2 \delta(\vec{P}_f + \vec{q}_f - \vec{P}_i - \vec{q}_i) 2(1 + \frac{1}{3}) F(q_f) D^2(E) F(q_i) \Gamma(E) \vec{q}_i \cdot \vec{q}_f \quad \times$$

$$16\pi^3 \left[\frac{1}{4A} \rho \left(\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{1+\eta} \right) + \frac{1}{16} G \left[\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2(1+\eta)}, \frac{2\langle \vec{q}_n \rangle - \vec{q}_i - \vec{q}_f}{2(1+\eta)} \right] \right]$$

Or le terme du premier ordre s'écrit avec les mêmes approximations

$$V^I(\vec{q}_f, \vec{q}_i, E) = (2\pi)^3 \delta(\vec{P}_f + \vec{q}_f - \vec{P}_i - \vec{q}_i) (A-1) 2(1 + \frac{1}{3}) F(q_f) D(E) F(q_i) 2\vec{q}_i \cdot \vec{q}_f \frac{1}{4} \rho \left(\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{1+\eta} \right)$$

En posant alors :

$$x = \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2}{(1+\eta)^2 8\nu}, \quad y = \frac{(2\langle \vec{q}_n \rangle - \vec{q}_i - \vec{q}_f)^2}{(1+\eta)^2 8\nu}$$

nous avons :

$$\rho \left(\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{1+\eta} \right) = e^{-2x} \left[1 - \frac{8x}{9} \right]$$

$$G \left[\frac{\vec{q}_i - \vec{q}_f}{2(1+\eta)}, \frac{2\langle \vec{q}_n \rangle - \vec{q}_i - \vec{q}_f}{2(1+\eta)} \right] = e^{-x} e^{-y} \frac{1}{81} [21 - 20x + 4y + 4(x-y)^2]$$

et le second ordre du potentiel optique peut s'écrire :

$$V^{II}(E, \vec{q}_i, \vec{q}_f) = (2\pi)^3 \delta(\vec{P}_f + \vec{q}_f - \vec{P}_i - \vec{q}_i) (A-1) \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) F(q_f) D(E) F(q_i) 2\vec{q}_i \cdot \vec{q}_f \frac{1}{4} e^{-2x} R(x, y)$$

$$\text{avec } R(x, y) = -i \Gamma(E) D(E) \frac{A-1}{A} \left[\left(1 - \frac{8x}{9}\right) - \frac{A}{4} e^x e^{-y} \frac{1}{81} (21 - 20x + 4y + 4(x-y)^2) \right]$$

Dans cette expression nous avons isolé la partie dominante du terme du premier ordre, si bien que R représente le rapport entre ce terme et le terme du second ordre. Or au voisinage de la résonance nous avons :

$$-i \Gamma(E) D(E) \approx 1$$

Ainsi, nous voyons que, pour les faibles moments de transfert, R varie de 0.2 à 1. suivant les valeurs de y , ce qui entraîne que vers l'avant le second ordre est du même ordre de grandeur que le premier. De plus il est clair que, pour les grands moments de transfert, le second ordre devient très nettement prépondérant.

2) Les approximations introduites dans ce calcul doivent être examinées très soigneusement car il est clair que la valeur du terme du second ordre en dépend de manière critique. Considérons, en effet, l'approximation statique. Avec la cinématique utilisée, nous avons vu que l'énergie dans le centre de masse π -nucléon est reliée à l'énergie dans le laboratoire par :

$W^2 = E^2 - P^2$ où $E = m + w_\pi$ est l'énergie π -nucléon dans le laboratoire, et $\vec{P}$ l'impulsion totale ; dans l'évaluation d'un élément de matrice de la forme :

$$\langle \vec{k} + \vec{q}_i - \vec{q}_f, \vec{q}_f | h(E) | \vec{q}_i, \vec{k} \rangle$$

l'énergie dans le centre de masse est égale à :

$$W^2 = E^2 - q_i^2 \quad \text{si l'on prend } \vec{k} = 0$$

$$W'^2 = E^2 - \frac{(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2}{4} \quad \text{si l'on prend } \vec{k} = \frac{\vec{q}_f - \vec{q}_i}{2}$$

Il est clair que pour les diffusions sur couche de masse et vers l'avant ces deux cinématiques donnent des résultats voisins, mais que pour les diffusions vers l'arrière elles diffèrent complètement : en effet pour $\vec{q}_i = -\vec{q}_f$ et $|q_i| = 300 \text{ Mev/c}$ nous avons :

$$W' \approx W + 40$$

Au voisinage de la résonance, un tel déplacement en énergie peut entraîner une modification d'un facteur 2 sur l'amplitude de diffusion π -nucléon et donc un facteur 4 sur l'estimation du terme du second ordre.

De même la correction à l'approximation d'impulsion doit être examinée correctement puisqu'elle apporte une modification de l'énergie effective π -nucléon de l'ordre de 20 à 30 Mev, ce qui peut encore entraîner une variation d'un facteur 2 ou 3 sur l'estimation du second ordre.

VIII - CALCULS NUMERIQUES

Dans ce chapitre nous allons voir comment a été utilisé le potentiel optique obtenu précédemment pour calculer les sections efficaces totales et différentielles élastiques $\pi^{12}\text{C}$. Nous verrons aussi les méthodes numériques utilisées dans ce calcul.

VIII.1 Principe de la méthode

Nous avons vu que la matrice de diffusion π -noyau, ou plutôt l'opérateur $T(E) = \frac{A-1}{A} \langle 0 | M(E) | 0 \rangle$ satisfait à l'équation intégrale :

$$T(E) = V(E) + V(E) G_0^+(E) T(E)$$

où $V(E)$ est le potentiel optique et $G_0^+(E)$ le propagateur libre du pion et du noyau. D'autre part il est facile de relier l'amplitude de diffusion à l'opérateur $T(E)$. Par conséquent il semble naturel de résoudre l'équation intégrale précédente pour calculer l'amplitude de diffusion et les sections efficaces. Cependant le noyau de cette équation intégrale est singulier ce qui en rend la résolution précise très délicate. Pour cette raison nous avons préféré une méthode de résolution moins directe, mais plus précise. On peut considérer, en effet, que l'équation précédente est identique à l'équation suivante pour la fonction d'onde du pion :

$$\Psi^+ = \varphi + G_0^+(E) V(E) \Psi^+$$

qui peut encore s'écrire :

$$(E - \sqrt{k^2 + \mu^2} - \sqrt{k^2 + M^2}) \Psi(\vec{k}) = \int V(E, \vec{k}, \vec{k}') \Psi(\vec{k}') d\vec{k}'$$

Dans cette équation on peut soit négliger l'énergie cinétique du noyau, soit déterminer une énergie et une masse effective du pion telle que l'on ait

$$(E - \sqrt{k^2 + \mu^2} - \sqrt{k^2 + M^2}) \simeq (E_{\text{eff}} - \sqrt{k^2 + v^2}) \text{ pour } k \text{ voisin de } k_0,$$

moment du pion dans la réaction. On obtient alors

$$\begin{aligned} E_{\text{eff}} &= \omega_\pi \left[1 - \frac{\omega_\pi}{M} \right] \\ v^2 &= \mu^2 \left[1 - 2 \frac{\omega_\pi}{M} \frac{\omega_\pi^2}{\mu^2} \right] \end{aligned} \quad \omega_\pi = \sqrt{k_0^2 + \mu^2}$$

et l'équation d'onde s'écrit :

$$(E_{\text{eff}} - \sqrt{k^2 + v^2}) \Psi(\vec{k}) = \int V(E, \vec{k}, \vec{k}') \Psi(\vec{k}') d\vec{k}'$$

En multipliant les deux membres par $(E_{\text{eff}} + \sqrt{k^2 + v^2})$ on obtient

$$(E_{\text{eff}}^2 - k^2 - v^2) \Psi(\vec{k}) = \int U(E, \vec{k}, \vec{k}') \Psi(\vec{k}') d\vec{k}'$$

avec

$$U(E, \vec{k}, \vec{k}') = (E_{\text{eff}} + \sqrt{k^2 + v^2}) V(E, \vec{k}, \vec{k}')$$

et par transformée de Fourier nous aboutissons à l'équation intégral-différentielle suivante :

$$(\Delta + k_0^2) \Psi(\vec{r}) = \int U(E, \vec{r}, \vec{r}') \Psi(\vec{r}') d\vec{r}'$$

où
$$U(E, \vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} d\vec{k}' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} U(E, \vec{k}, \vec{k}')$$

Après projection sur les états propres du moment angulaire nous obtenons, puisque le potentiel est invariant par rotation

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k_0^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \varphi_\ell(r) = \int r' U_\ell(E, r, r') r' \varphi_\ell(r') dr'$$

avec
$$U_\ell(E, r, r') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk dk' k^2 j_\ell(kr) (E_{eff} + \sqrt{k^2 + v^2}) k'^2 j_\ell(k'r') \int_{-1}^{+1} P_\ell(u) V(E, k, k', u) du$$

La résolution de ces équations intégral-différentielles nous fournit les déphasages δ_ℓ (en général complexes) et l'amplitude de diffusion π -noyau qui s'écrit :

$$f(\theta) = \frac{A}{A-1} \frac{1}{2ik_0} \sum_\ell (2\ell + 1) (e^{2i\delta_\ell} - 1) P_\ell(\cos \theta)$$

VIII.2 Calculs numériques

A) Calcul du potentiel

Le potentiel $V(E, k, k', u)$ est la somme de plusieurs termes : le terme direct du premier ordre, que nous calculons correctement en effectuant l'intégrale triple par une méthode d'Hermite Gauss, le terme de spin flip que nous avons négligé, et le terme du second ordre dans lequel nous effectuons numériquement l'intégration sur les angles de q_n .

L'intégrale triple est calculée avec $3^3, 7^3$, ou 9^3 points suivant la précision demandée, tandis que l'intégrale double est effectuée avec 6 points qui correspondent à $\theta = 0, \pi/2, \pi$ et $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

Décomposition sur les polynomes de Legendre.

Nous l'effectuons à l'aide de la méthode numérique d'intégration de Gauss à 16 points. Malgré le caractère singulier de la fonction qui est de la forme : $e^{\beta u}$ où β peut être de l'ordre de 30 à 40, la précision atteinte est suffisante.

B) Transformée de Fourier

L'intégrale double

$$U_\ell(E, r, r') = \int dk dk' j_\ell(kr) j_\ell(k'r') F(k, k')$$

est effectuée par la méthode des trapèzes qui s'est révélée la plus précise et la plus rapide. Le nombre de points employés pour calculer cette intégrale varie de $(10)^2$ à $(30)^2$, avec un cut-off $k_M = 1000 \text{ Mev/c}$. Cependant cette méthode ne s'applique que pour des valeurs de r et r' inférieures à 6fm. Au delà le potentiel décroît exponentiellement et il est impossible d'obtenir l'ordre de grandeur correct avec une méthode aussi grossière.

C) Résolution de l'équation intégral-différentielle *

Quoique plus simple à résoudre qu'une équation intégrale singulière, les équations intégral-différentielles obtenues posent de nombreux problèmes. Ceci provient du fait que la partie imaginaire du potentiel est très grande, ce qui entraîne que les fonctions d'onde ont un comportement exponentiel. D'autre part le potentiel est très non-local c'est à dire que le champ au point r dépend fortement de la valeur de la fonction d'onde au point r' tant que $|r-r'| < 3\text{fm}$. Dans ces conditions il est clair qu'un processus itératif est très instable. Cependant, comme c'est un moyen assez rapide et précis, c'est celui que nous avons employé.

Nous avons donc à résoudre une équation du type

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f(r) = \int_0^\infty k(r, r') f(r') dr'$$

dans laquelle le comportement à l'origine du terme inhomogène est en r^{l+1} . Dans ces conditions nous savons que la solution régulière à l'origine aura un comportement du même type. Pour résoudre cette équation par itération nous avons le choix entre deux méthodes : dans la première nous choisissons une fonction de départ $\psi_0(r)$ telle que $\psi_0(0) = 0$, $\psi_0(h) = h^{l+1}$. Nous en déduisons :

$$V_0(r) = \int_0^\infty k(r, r') \psi_0(r') dr'$$

et nous résolvons l'équation différentielle inhomogène obtenue en choisissant les mêmes conditions initiales :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \psi_1(r) &= V_0(r) \\ \psi_1(0) &= 0 \\ \psi_1(h) &= h^{l+1} \end{aligned}$$

En itérant, on obtient

$$\begin{aligned} V_{n-1}(r) &= \int_0^\infty k(r, r') \psi_{n-1}(r') dr' \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \psi_n(r) &= V_{n-1}(r) \\ \psi_n(0) &= 0 \\ \psi_n(h) &= h^{l+1} \end{aligned}$$

Si le processus converge on est assuré que la fonction obtenue vérifie bien l'équation intégrale et le problème est résolu. Dans notre cas la convergence de cette méthode était mauvaise, aussi avons nous préféré l'autre méthode.

* Cette méthode de résolution est due à D.G. Vautherin qui l'a utilisée pour les équations d'Hartree-Fock. Pour plus de détails sur cette méthode on peut se référer à sa thèse : "Etude des solutions du système intégral-différentiel de Hartree-Fock pour les noyaux sphériques", ORSAY (1969)

Dans celle-ci, à partir d'une fonction $\psi_0(r)$ vérifiant les mêmes conditions initiales, nous calculons un potentiel moyen :

$$W_0(r) = \frac{1}{\psi_0(r)} \int_0^\infty k(r, r') \psi_0(r') dr'$$

Ce potentiel moyen est défini partout, sauf au voisinage des zéros de la fonction $\psi_0(r)$. Aussi cette méthode ne s'applique-t-elle pas dans le cas où le potentiel est réel, puisque l'on obtient en général des solutions oscillantes qui peuvent présenter un grand nombre de zéros. Cependant dès que le potentiel est complexe, il est peu probable que la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction d'onde s'annulent au même point. En général le potentiel moyen sera donc bien défini dans notre cas. La méthode d'itération est donc la suivante. A partir de $W_0(r)$, on calcule la solution de l'équation homogène $\psi_1(r)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l-1)}{r^2} - W_0(r) \right] \psi_1(r) = 0$$

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(h) = h^{\ell+1}$$

Cette solution existe puisque $W_0(r)$ a un comportement régulier à l'origine. En itérant on obtient :

$$W_{n-1}(r) = \frac{1}{\psi_{n-1}(r)} \int_0^\infty k(r, r') \psi_{n-1}(r') dr'$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l-1)}{r^2} - W_{n-1}(r) \right] \psi_n(r) = 0$$

$$\psi_n(0) = 0, \quad \psi_n(h) = h^{\ell+1}$$

Comme dans la méthode précédente, si le processus converge le problème est résolu.

Remarque

1) Il peut arriver au cours de l'itération que la fonction $\psi_n(r)$ présente un zéro simultané pour les parties réelle et imaginaire au point r . Dans ce cas dans le voisinage de ce zéro on remplace le potentiel moyen $W_n(r)$ par une fonction $F_n(r)$ interpolation polynomiale de W_n .

2) Si la méthode ne converge pas, il est possible de la rendre convergente en la modifiant comme suit : on remplace $W_{n-1}(r)$ par : $\chi_{n-1}(r) = \alpha \chi_{n-2} + (1-\alpha) \frac{1}{\psi_{n-1}(r)} \int U(r, r') \psi_{n-1}(r') dr^2$

et on résout l'équation homogène avec $\chi_{n-1}(r)$. En général avec une valeur de $\alpha = 0.9$, la méthode converge toujours, mais très lentement.

Pour appliquer cette méthode à notre problème nous avons utilisé la méthode de Numerov pour résoudre l'équation différentielle du second ordre. Le potentiel $V_l(E, r, r')$ est tabulé pour toutes les valeurs de $r = n h$ et $r' = n' h$ ($r \leq 4 \text{ fm}$, $r' \leq 6 \text{ fm}$) où h est le pas utilisé pour résoudre l'équation différentielle et pour le calcul du champ moyen $W_n(r)$. Ce dernier calcul est effectué grâce à la méthode des trapèzes pour les valeurs de $r \leq 4 \text{ fm}$. Pour les valeurs supérieures nous avons utilisé une extrapolation de

$W_n(r)$ suivant la densité et la dérivée de la densité c'est à dire

$$W_n(r) = \alpha \rho(r) + \beta \frac{d\rho}{dr}(r)$$

$$\text{avec } \rho(r) = e^{-\nu r^2} \left[1 + \frac{4\nu}{3} r^2 \right]$$

ce qui nous assure un comportement asymptotique correct du champ moyen $W_n(r)$. Dans la pratique le pas d'intégration est voisin de 0.1 fm, et en général, il suffit d'une vingtaine d'itérations pour obtenir la solution.

D) Précision des résultats

On pourrait penser, après ce tableau des méthodes numériques, que les résultats obtenus sont largement entachés d'erreur, puisqu'en particulier le potentiel $U_l(E, r, r')$ est calculé par une intégrale 6ème. Cependant il n'en est rien comme l'a prouvé une étude systématique des résultats obtenus avec différents pas d'intégration. Et il semble que l'erreur sur les déphasages soit inférieure au 1%.

$$\begin{aligned} \text{Erreur sur } \left| \operatorname{Re} e^{2i\delta_l} \right| &< 0.01 \\ \left| \operatorname{Im} e^{2i\delta_l} \right| &< 0.01 \end{aligned}$$

IX - RESULTATS

Le but de ce travail étant l'étude de l'interaction π -noyau au voisinage de la résonance $(3/2, 3/2)$, nous comparerons nos résultats à ceux des expériences de diffusion élastique π^- ^{12}C effectuées au C.E.R.N. par le groupe M.S.S., qui sont les seules à couvrir ce domaine d'énergie. Dans tous ces calculs, les paramètres décrivant le ^{12}C ont été fixés aux valeurs suivantes :

Paramètre de l'oscillateur harmonique $\nu = 15376 \text{ (Mev/c)}^2$ correspondant à un rayon moyen carré : $\langle r^2 \rangle^{1/2} = 2.35 \text{ fm}$
Energie de liaison d'un nucléon S : - 34.5 Mev
Energie de liaison d'un nucléon P : - 16. Mev

1) Calculs avec le 1er Ordre du potentiel optique

Dans cette partie, où nous avons négligé les termes de spin-flip, le potentiel coulombien et le second ordre du potentiel optique, nous étudions la validité de l'approximation d'impulsion et des corrections (A) et (B) que l'on peut lui apporter. Dans ces calculs, le paramètre $\bar{E}_N$ qui figure dans la 1ère correction à l'approximation d'impulsion (A) a été fixé à une valeur égale à l'énergie de liaison du nucléon considéré :

$$\bar{E}_N = 34.5 \text{ Mev} \quad \text{pour un nucléon S.}$$

$$\bar{E}_N = 16. \text{ Mev} \quad \text{pour un nucléon P.}$$

D'autre part nous négligeons complètement la contribution des ondes partielles π -nucléon autres que l'onde $(3/2, 3/2)$. Les résultats obtenus pour les sections efficaces différentielles sont présentés sur les figures I.1 à I.7.

Il est remarquable de constater que l'accord avec les résultats expérimentaux est sensiblement moins bon que dans le cas du modèle de Kisslinger, en particulier à 120 Mev.

D'autre part, l'influence des corrections (A) ou (B) à l'approximation d'impulsion est très grande et se fait sentir très nettement au voisinage de la résonance où elle améliore notablement l'accord avec les valeurs expérimentales. De plus on peut remarquer que, si à basse énergie ces deux corrections sont équivalentes, il n'en est plus de même à plus haute énergie où la correction (B) donne des résultats nettement meilleurs. Ceci est probablement dû au fait que le paramètre $\bar{E}_N$ varie assez rapidement en fonction de l'énergie, ce dont nous n'avons pas tenu compte.

Sur la figure I.8 on peut voir les résultats obtenus avec ces différentes approximations pour les sections efficaces totales. Là encore l'accord avec les résultats expérimentaux n'est pas très bon, aussi bien du point de vue qualitatif que quantitatif. Le seul point positif de la comparaison étant que l'approximation d'impulsion place le maximum de la section efficace totale vers 200 Mev tandis que les corrections (A) et (B) ramènent celui-ci vers 150 Mev.

Sur la figure I.9 le comportement de la partie réelle de l'amplitude à 0° est comparé aux prédictions des relations de dispersion vers l'avant. On remarque que le point où la courbe croise l'axe dépend fortement de l'approximation utilisée. En particulier l'approximation d'impulsion conduirait à placer la résonance π -Noyau à 230 Mev, alors que les corrections A et B ramènent celle-ci vers 180 ou 200 Mev.

Enfin sur les figures I.10 à I.17, nous présentons une comparaison entre les résultats obtenus avec la correction (B) et les résultats obtenus avec le modèle de Kisslinger en utilisant les mêmes paramètres. (Nous avons utilisé la paramétrisation de Mac-Kinley pour le déphasage P_{33} et nous avons négligé toutes les autres ondes partielles π -nucléon dans le calcul des paramètres a et b, et nous avons fixé le paramètre

d'oscillateur harmonique à la valeur $v = 15\,376 \text{ (Mev/c)}^2$). De cette comparaison il ressort qu'à 120 et 150 Mev le modèle de Kisslinger décrit mieux la réalité, mais qu'à plus haute énergie notre modèle semble plus adapté. En ce qui concerne les sections efficaces totales, aucun de ces deux modèles ne paraît apte à les décrire.

2) Caractères généraux de l'interaction pion-Noyau

Dans cette partie, faute de pouvoir étudier simplement le potentiel non local obtenu, nous étudions les champs moyens locaux équivalents, calculés en utilisant la correction (B) à l'approximation d'impulsion. Rappelons que ces champs moyens sont définis par

$$W_\ell(r) = \frac{1}{2E \Psi_\ell(r)} \int U_\ell(E, r, r') \Psi_\ell(r') r'^2 dr'$$

Il est clair que l'introduction de ces potentiels dans une équation de Schrödinger (où l'on aurait remplacé la masse par l'énergie) donnerait les mêmes résultats en ce qui concerne les sections efficaces différentielles et totales ; par conséquent on peut penser qu'ils décrivent correctement l'interaction π -noyau.

Dans les figures II.1 et II.2, nous présentons la partie réelle et la partie imaginaire de $W_\ell(r)$, pour $\ell = 0, 1, 2, 3$, à 200 Mev. Tout d'abord on remarque de très grandes différences entre les champs moyens pour des ondes partielles différentes, ce qui est dû à la très grande non localité du potentiel $V(\vec{r}, \vec{r}')$. (Pour les ondes partielles $L > 3$ l'allure et la profondeur de ces champs restent sensiblement identiques). D'autre part, ainsi que l'on pouvait le prévoir, au voisinage de la résonance, l'interaction π -Noyau est très forte, en particulier l'absorption qui semble dominer complètement pour les ondes partielles $L = 0$ ou 1. Quant à l'allure qualitative de ces potentiels moyens, on peut dire que pour les ondes partielles $L = 2, 3, \dots$, ils sont pratiquement proportionnels à la densité (en particulier en ce qui concerne l'absorption) et que les effets de surface sont beaucoup plus faibles que ceux prédits par le modèle de Kisslinger. Par contre pour les ondes partielles $L = 0$ ou 1, on voit apparaître un effet de surface assez important tandis que l'allure générale diffère profondément de celle de la densité. Quant à l'évolution de ces champs moyens en fonction de l'énergie elle est reportée sur les figures II.3 et II.4 pour $W_0(r)$. On peut noter tout d'abord la rapidité avec laquelle le potentiel varie au voisinage de la résonance, aussi bien du point de vue de l'intensité que de la forme. D'attractif au-dessous de la résonance il devient répulsif au-dessus, tandis que l'attraction de surface tend à disparaître. En ce qui concerne l'absorption elle passe par un maximum très important à 200 Mev, tandis que se développe lentement une absorption de surface qui devient prédominante à 260 Mev.

Enfin sur la figure II.5 nous présentons le diagramme d'Argand obtenu pour tous les déphasages en fonction de l'énergie. Il est intéressant de noter la régularité de l'évolution de ceux-ci, comparée aux résultats des analyses en déphasages effectuées jusqu'à présent. D'autre part, ce diagramme montre clairement l'influence de la résonance $(3/2, 3/2)$ sur la diffusion élastique π -Noyau : à part l'onde S, toutes les autres ondes partielles présentent une résonance à une énergie voisine de la résonance π -nucléon. Cependant, en raison de cinématiques différentes, ces résonances se produisent à des énergies qui passent de 120 Mev pour l'onde $L = 1$ à 200 Mev pour l'onde $L = 6$. Il semble donc que l'on puisse dire que la résonance π -nucléon se traduit dans la diffusion π -noyau par une superposition de différentes résonances.

3) Influence du potentiel coulombien

En raison du désaccord existant à l'avant entre les résultats expérimentaux et les prédictions de ce modèle pour les sections efficaces différentielles, nous avons tenu compte dans cette partie de la diffusion coulombienne. Le potentiel coulombien $V(r)$, calculé avec une densité de charge uniforme de portée $R = 3\text{fm}$, a été introduit de la manière

■ Note : Le choix de cette densité peu réaliste est justifié par le fait que les effets dus au coulombien sont faibles, et qu'ils sont presque identiques dans le cas où l'on suppose la charge ponctuelle.

habituelle dans l'équation de Klein-Gordon. Cependant, en raison de sa très faible importance, nous avons négligé le terme carré $V_s^2(r) \ll 2E V_l(r) \ll W_l(r)$. Le calcul des déphasages s'effectue donc en raccordant aux fonctions d'ondes coulombiennes classiques, avec un paramètre $\eta = \frac{-6}{137} \frac{E}{K}$. Et l'amplitude s'écrit :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= f_C^0(\theta) + f_N^0(\theta) \\ &= f_C^0(\theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{\ell} (2\ell+1) e^{2i\sigma_{\ell}} (e^{2i\delta_{\ell}} - 1) P_{\ell}(\cos \theta) \end{aligned}$$

où $f_C^0(\theta)$ est l'amplitude de diffusion coulombienne ponctuelle :

$$f_C^0(\theta) = - \frac{\eta}{2K \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{2i[\sigma_0 - \eta \text{Log} \sin \frac{\theta}{2}]}$$

et où σ_{ℓ} est le déphasage coulombien ponctuel :

$$\sigma_{\ell} = \text{Arg} [\Gamma(1+i\eta)]$$

Résultats :

Excepté dans la zone où l'interférence est assez nette, l'effet du coulombien sur les sections efficaces différentielles est très faible. D'autant plus qu'au voisinage de la résonance, la partie réelle de l'amplitude nucléaire est très proche de zéro, ce qui entraîne que l'interférence est négligeable. Pour ces raisons, au-delà de 10° , on n'observe aucune différence significative entre les calculs avec coulombien et sans coulombien pour les sections efficaces différentielles à 180, 200 et 230 Mev. Sur les figures III.1 et III.2 sont présentés les résultats à 120 et 260 Mev. Là encore le coulombien apporte peu de modification, excepté dans la région du 1er et du 2ème creux de diffraction où son effet se fait sentir assez nettement, sans, toutefois améliorer l'accord avec les résultats expérimentaux.

Sur les figures III.3 et III.4 nous présentons les résultats obtenus pour les sections efficaces totales et la partie réelle de l'amplitude à 0° . Avant tout, il est important de noter que la présence de l'interaction coulombienne rend délicate la définition de ces quantités tant du point de vue théorique qu'expérimental. Dans ces figures nous avons reporté les valeurs correspondant à l'amplitude nucléaire distordue, c'est à dire que nous avons pris :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Tot}} &= \frac{4\pi}{k} \text{Im} [f(\theta) - f_C^0(\theta)] \\ &= \frac{4\pi}{k} \text{Im} [f_N^D(\theta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \text{Re}[f_N(0)] &= \text{Re} [f(\theta) - f_C^0(\theta)] \\ &= \text{Re} [f_N^D(\theta)] \end{aligned}$$

Sur les quantités ainsi définies l'influence du coulombien est notable, et il semble que l'accord avec les valeurs expérimentales et avec les prédictions des relations de dispersion soit sensiblement amélioré. Par contre, ainsi que nous l'avons vu, cet effet ne se répercute pas sur les distributions angulaires, car, au premier ordre en η , l'amplitude nucléaire distordue se déduit de l'amplitude nucléaire pure par une simple rotation.

4) Influence du 2ème ordre du potentiel optique

Dans cette partie, nous ajoutons au potentiel calculé avec la correction (B) à l'approximation d'impulsion, le 2ème ordre du potentiel optique qui tient compte des corrélations de Pauli. En raison de la force de l'interaction π -nucléon, des résultats n'ont pu être obtenus que pour 120 et 150 Mev. Au delà, le processus itératif de résolution de l'équation intégral-différentielle n'est pas toujours convergent et, lorsqu'il converge, les champs moyens locaux équivalents ont parfois une partie imaginaire positive ce qui rend évidemment impossible toute interprétation des résultats. Les résultats obtenus à 120 et 150 Mev sont présentés sur les figures IV.1 et IV.2. L'examen des distributions angulaires montre clairement qu'à ces énergies l'influence du second ordre du potentiel optique est grande, dans tout le domaine angulaire. De même l'effet des diverses approximations utilisées dans le calcul est très grand ainsi que nous l'avons montré. En ce qui concerne les sections efficaces totales on observe de même des variations importantes :

	Exp	1er ordre	1er+2ème ordre(1)	1er+2ème ordre(2)	1er+2ème ordre(3)
120	681.	794.	807.	791.	773.
150	696.	790.	730.	847.	704.

Dans ce tableau et dans les figures IV.1 et IV.2

(1) signifie que le calcul du 2ème ordre a été fait en utilisant la correction (A) à l'approximation d'impulsion et en utilisant l'approximation statique telle que nous l'avons vu dans le calcul du 1er ordre ($\vec{K}_N = - \frac{q_i - q_f}{2}$)

(2) signifie que le calcul du 2ème ordre a été fait en utilisant l'approximation d'impulsion et la même cinématique qu'en (1)

(3) correspond au calcul du 2ème ordre avec la correction à l'approximation d'impulsion et avec l'approximation statique habituelle ($\vec{K}_N \approx 0$)

X - CONCLUSION

Nous venons de voir quelques applications de la théorie de la diffusion multiple de Watson dans le cas de la diffusion élastique pion-Noyau au voisinage de la résonance $(3/2, 3/2)$. De cette étude il semble que l'on puisse déduire que ce formalisme est bien adapté à l'analyse des interactions pion-Noyau. De plus l'accord obtenu entre l'expérience et la théorie constitue, en quelque sorte, une justification, à postériori, des hypothèses qui sont à la base de cette théorie :

- a) Mécanique quantique classique valable.
- b) Les interactions dérivent d'un potentiel, ou il existe un potentiel qui décrit la diffusion sur et hors couche
- c) Il n'existe pas d'interaction à plus de deux corps
- d) L'interaction nucléon-nucléon peut être séparée de l'interaction π -nucléon

Nous avons vu dans le chapitre II que ces hypothèses sont sujettes à caution mais il semble que l'introduction d'une cinématique relativiste suffit pour rendre compte des résultats expérimentaux. Toutefois une étude plus complète et la comparaison avec une théorie utilisant le formalisme de la théorie quantique des champs seraient souhaitables pour obtenir la confirmation de ce fait.

Un autre point intéressant à noter est la différence entre les résultats obtenus avec la théorie de Glauber ou le modèle de Kisslinger et les résultats que nous obtenons par un calcul plus précis. Ceci tendrait à prouver que les approximations qui sont à la base de ces deux modèles simples sont trop grossières pour que l'on puisse en tirer des informations précises aussi bien sur l'interaction π -nucléon dans le noyau que sur la structure nucléaire. Il semble donc que l'accord entre les résultats expérimentaux et ceux donnés par ces deux modèles soit dû à une compensation fortuite de plusieurs approximations. Il est clair en effet que la suppression de l'approximation à un grand nombre de nucléons ou que le fait de tenir compte du mouvement du centre de masse du noyau modifierait sensiblement les fits obtenus. Un traitement correct du problème semble donc nécessaire avant que l'on puisse en tirer des conclusions.

La comparaison entre nos résultats et les résultats expérimentaux permet de constater immédiatement l'importance de la correction à l'approximation d'impulsion. Nous avons vu en effet que l'évolution des distributions angulaires en fonction de l'énergie n'est bien rendue que dans le cas où l'on tient compte des effets de l'interaction nucléon-nucléon dans la diffusion π -nucléon lié. Toutefois le désaccord observé à 120 Mev, semble prouver qu'à basse énergie, la correction que nous avons déterminée est insuffisante, et que les effets du principe de Pauli devraient y être inclus.

De même il ressort de notre étude que les effets de l'interaction coulombienne ne sont pas seulement sensible à l'avant, ce qui est trivial, mais aussi dans la région du premier creux de diffraction dont la profondeur peut être sensiblement modifiée. De plus nous avons vu que la présence de cette interaction coulombienne rend délicate l'interprétation des mesures de "sections efficaces totales nucléaires".

L'interprétation des résultats obtenus en tenant compte du 2ème ordre du potentiel optique est plus délicate. En effet ce terme apparaît comme très important dans toute cette gamme d'énergie, en particulier à la résonance où il semble du même ordre de grandeur que le 1er ordre. Devant un tel problème, on peut penser soit que ce terme a été surestimé, soit que son ordre de grandeur est correct, ce qui nous amènerait alors à tenir compte d'ordres supérieurs du potentiel optique. Dans ces deux éventualités il est clair que nous serons d'abord conduit à calculer plus précisément le terme du second ordre, en tenant compte des parties principales que nous avons négligées et en raffinant l'approximation statique et la correction à l'approximation d'impulsion. Ce n'est qu'ensuite que nous pourrions juger laquelle de ces deux éventualités est vraie.

Si c'est la première, on pourra considérer alors le problème de l'interaction π -Noyau au voisinage de la résonance comme résolu, au moins théoriquement. En effet notre

étude semble confirmer que le modèle de Chew et Low décrit correctement la diffusion π -nucléon aussi bien sur couche qu'hors couche de masse, et que la théorie de la diffusion multiple de Watson s'applique à ce problème. En introduisant dans ce formalisme le processus d'absorption du pion sur une paire de nucléons, nous disposerons alors d'un outil bien adapté qui devrait nous permettre d'étudier précisément la structure nucléaire.

Par contre, si la seconde éventualité se révélait juste, le problème resterait ouvert. En effet, en s'appuyant sur les résultats obtenus avec la théorie de Glauber, on peut penser que le pion interagit en moyenne avec 4 nucléons du ^{12}C , ce qui nous amènerait logiquement à tenir compte des 1er, 2ème, 3ème et 4ème ordres du potentiel optique. Certes, ces termes sont très intéressants car ils contiennent énormément d'informations sur la structure nucléaire mais il est à craindre que les approximations nécessairement introduites dans le calcul de tels termes rendent parfaitement aléatoires les résultats. Par conséquent il serait probablement nécessaire d'aborder le problème sous un autre angle, par exemple en calculant directement le potentiel optique sans utiliser un développement en série.

APPENDICE

Correction due au spin-flip

Nous allons voir maintenant, de manière approximative, l'importance des termes de spin flip. Pour cela reprenons l'expression du potentiel optique, en ne gardant que le terme en $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_f \wedge \vec{p}_i)$

$$\langle \vec{q}_f i | V^{S.F}(E) | \vec{q}_i i \rangle = \frac{A-1}{A} \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f) \sum_{\substack{n \ell j m \\ t}} \sum_{\substack{\mu \mu' \\ s s'}} \langle i t | T_{3/2} | i t \rangle \langle \ell \mu \frac{1}{2} s | j m \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle j m | \ell \mu' \frac{1}{2} s' \rangle \int d\vec{P} H(E, \vec{q}_i, \vec{q}_f, \vec{P}, n \ell j t) \varphi_{n \ell \mu'}^* \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_f}{1+\eta} \right) \varphi_{n \ell \mu} \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_i}{1+\eta} \right) \\ - i \langle s' | \vec{\sigma} | s \rangle \cdot (\vec{p}_f \wedge \vec{p}_i) \end{aligned}$$

Ainsi que nous l'avons vu, l'effet de spin flip ne concerne que la couche $1P_{3/2}$. La somme précédente se réduit donc à $j = 3/2$, $\ell = 1$ et $n = 0$. D'autre part nous avons les relations :

$$\begin{aligned} \langle s' | \sigma_y | s \rangle &= (-1)^{1/2-s'} \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ -s' & y & s \end{pmatrix} \\ \text{et} \quad \sum_{ms, s'} (2j+1)(-1)^{1/2-s'} &\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ -s' & y & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & 1/2 & j \\ \mu & s & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & 1/2 & j \\ \mu' & s' & -m \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+\mu'} (2j+1) \left\{ \begin{matrix} \ell & \ell & 1 \\ 1/2 & j & 1/2 \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} \ell & \ell & 1 \\ \mu & -\mu' & -y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut donc réécrire le potentiel sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_f i | V^{S.F}(E) | \vec{q}_i i \rangle &= -i \frac{A-1}{A} \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f) \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{3}\right) (2j+1) \sum_{\mu \mu' y} (-1)^{1+\mu'+y} \left\{ \begin{matrix} \ell & \ell & 1 \\ 1/2 & j & 1/2 \end{matrix} \right\} \\ &\begin{pmatrix} \ell & \ell & 1 \\ \mu & -\mu' & -y \end{pmatrix} \int d\vec{P} H(E, \vec{q}_i, \vec{q}_f, \vec{P}, j) \varphi_{n \ell \mu'}^* \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_f}{1+\eta} \right) \varphi_{n \ell \mu} \left(\vec{P} - \frac{\vec{q}_i}{1+\eta} \right) (\vec{p}_f \wedge \vec{p}_i)_{-y} \end{aligned}$$

dans laquelle nous avons supposé que les f.o. étaient identiques pour proton et neutron. Nous allons maintenant utiliser une cinématique quasi-classique pour calculer $F(E, q_i, q_f, P, j)$, p_i et p_f , et nous ferons un développement limité en

$$\alpha = \frac{\omega_\pi}{\omega_\pi + m} \quad . \quad \text{Par analogie avec la cinématique classique nous aurons donc :}$$

$$\vec{p}_i = \frac{\epsilon_N^i \vec{q}_i - \epsilon_\pi^i (\vec{P} - \vec{q}_i)}{\epsilon_\pi^i + \epsilon_N^i} \approx \vec{q}_i - \alpha \vec{P}$$

$$\vec{p}_f = \frac{\epsilon_N^f \vec{q}_f - \epsilon_\pi^f (\vec{P} - \vec{q}_f)}{\epsilon_\pi^f + \epsilon_N^f} \approx \vec{q}_f - \alpha \vec{P}$$

où $\alpha = \frac{E - M_n - m}{E - M_n} \approx \frac{\omega_\pi}{\omega_\pi + m}$, où ω_π est l'énergie du pion dans la réaction.

D'autre part :

$$H(E, \vec{q}_i, \vec{q}_f, \vec{P}, n) = \sqrt{\frac{(\epsilon_\pi^i \epsilon_\pi^f \epsilon_N^i \epsilon_N^f) C.M.}{\epsilon_\pi^i \epsilon_\pi^f \epsilon_N^i \epsilon_N^f}} F(p_i) D(W) F(p_f)$$

Pour évaluer cette expression nous supposons que l'énergie du nucléon varie peu lorsque l'on passe du système du laboratoire au système du C.M., que le facteur de forme de la résonance se réduit à $F(p) \propto \frac{1}{\sqrt{p^2 + \mu^2}}$, et enfin que l'on peut évaluer W en prenant pour

$\vec{P}$ la valeur moyenne trouvée précédemment. Au premier ordre en α on obtient alors :

$$H(E, \vec{q}_i, \vec{q}_f, \vec{P}) = F(q_f) D \left(\sqrt{E^2 - \left(\frac{\vec{q}_i + \vec{q}_f}{2} \right)^2} \right) F(q_i) \times$$

$$\left[1 - \frac{\alpha}{2} \frac{\vec{P} \cdot (\vec{q}_i + \vec{q}_f)}{\omega_\pi^2} \right] \left[1 + \alpha \frac{\vec{P} \cdot \vec{q}_i}{q_i^2 + \mu^2} + \alpha \frac{\vec{P} \cdot \vec{q}_f}{q_f^2 + \mu^2} \right]$$

En introduisant ensuite les f.o. en représentation coordonnées, le potentiel s'écrit :

$$\langle \vec{q}_f i | V^{S.F}(E) | \vec{q}_i i \rangle = -i \frac{A-1}{A} \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f) 4 \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{3} \right) F(q_f) D(W) F(q_i) \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\int d\vec{P} d\vec{r} d\vec{r}' \sum_{\mu\mu'\nu} (-1)^{1+\mu'+\nu} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu & -\mu' & -\nu \end{pmatrix} \varphi_{o_1}^{\mu'*}(\vec{r}') \varphi_{o_1}^\mu(\vec{r}) e^{-i(\vec{P}-\vec{q}_f) \cdot \vec{r}'}$$

$$e^{i(\vec{P}-\vec{q}_i) \cdot \vec{r}} [1 + \alpha \vec{P} \cdot \vec{B}] [\vec{q}_f \wedge \vec{q}_2 - \alpha \vec{P} \wedge (\vec{q}_2 - \vec{q}_f)]_{-\nu}$$

$$\text{où } W^2 = E^2 - \frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2}{4}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{q}_i}{q_i^2 + \mu^2} + \frac{\vec{q}_f}{q_f^2 + \mu^2} - \frac{\vec{q}_i + \vec{q}_f}{2 \omega_\pi^2}$$

Pour poursuivre le calcul nous utilisons les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique :

$$\varphi_{o_1}^\mu(\vec{r}) = \left[\frac{8\sqrt{5/2}}{3\pi^{3/2}} \right]^{1/2} r e^{-\nu r^2/2} Y_1^\mu(\vec{r})$$

et nous utilisons l'identité :

$$\sum_{\mu\mu'} (-1)^{\mu'} Y_1^{\mu'}(\vec{r}') Y_1^{\mu}(\vec{r}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu & -\mu' & -\nu \end{pmatrix} = (-1)^{\nu} \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\vec{r} \wedge \vec{r}')_{\nu}}{rr'}$$

Nous sommes alors ramenés à une expression du type :

$$\langle \vec{q}_f i | V^{S.F}(E) | \vec{q}_i i \rangle = B \int d\vec{P} d\vec{r} d\vec{r}' e^{-i(\vec{P}-\vec{q}_f) \cdot \vec{r}'} e^{i(\vec{P}-\vec{q}_i) \cdot \vec{r}} e^{-\frac{\nu}{2} (\vec{r}^2 + \vec{r}'^2)}$$

$$(\vec{r} \wedge \vec{r}') \cdot [\vec{q}_f \wedge \vec{q}_i - \alpha \vec{P} \wedge (\vec{q}_i - \vec{q}_f)] [1 + \alpha \vec{P} \cdot \vec{B}]$$

$$\text{où } B = \frac{A-1}{A} \delta(\vec{p}_f - \vec{q}_f) \frac{3}{2\pi} (1 + \frac{1}{3}) \frac{8\nu^{5/2}}{3\pi^{3/2}} F(q_f) D(W) F(q_i) \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\}$$

Il est facile de voir que le terme dominant est nul, puisque l'intégrale sur $\vec{P}$ donne $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ et que le produit vectoriel $\vec{r} \wedge \vec{r}'$ s'annule alors. Ce fait est général car dans tous les cas on est placé devant une expression du type :

$$\sum_{\mu\mu'} (-1)^{\mu'} \begin{pmatrix} \ell & \ell & 1 \\ \mu & -\mu' & -\nu \end{pmatrix} Y_{\ell}^{\mu}(\vec{r}) Y_{\ell}^{\mu'}(\vec{r})$$

qui est identiquement nulle ;

Les autres intégrales se calculent facilement et l'on obtient :

$$\langle \vec{q}_f i | V^{S.F}(E) | \vec{q}_i i \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f) \frac{A-1}{A} (1 + \frac{1}{3}) F(q_f) D(W) F(q_i) e^{-\frac{(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2}{4\nu}}$$

$$\times \frac{1}{3\pi} \frac{\omega\pi}{\omega\pi+m} \left[2(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2 - q_i^2 q_f^2 \sin \theta \left(\frac{1}{q_i^2 + \mu^2} + \frac{1}{q_f^2 + \mu^2} - \frac{1}{\omega\pi^2} \right) \right]$$

En se reportant au calcul de la partie sans spin flip on se rend compte très facilement que l'ordre de grandeur des termes de spin flip est bien plus faible que celui des termes directs, en raison surtout des effets géométriques.

Bibliographie

Chapitre I

En ce qui concerne l'intérêt présenté par les réactions π -Noyau on pourra lire avec profit :

- I.1 M. Jean, Suppl. Nuovo Cimento 2, 400 (1964)
- I.2 T.E.O. Ericson, Proceedings of International Conference of High Energy Physics C.E.R.N. 47 (1963)
- I.3 T.E.O. Ericson, Phys. Letters 2, 278 (1962)
- I.4 K.A. Brueckner, R. Serber, K.M. Watson, Phys. Rev. 84, 258 (1951)
- I.5 M. Ericson et T.E.O. Ericson, Annals of Physics 36, 323 (1966)
- I.6 C. Zupancic, High Energy Physics and Nuclear Structure, Rehovoth (1967) -Page 171
- I.7 D.S. Koltun, Interaction of Pions with Nuclei, Advances in Nucl. Phys. 3, 21 (1969)

Les principaux résultats expérimentaux se trouvent dans les articles suivants :

- I.8 H. Byfield, J.O. Kessler, L.M. Lederman, Phys. Rev. 86, 17 (1952)
- I.9 W.F. Baker, J. Rainwater, R.E. Williams, Phys. Rev. 112, 1763 (1958)
- I.10 Y.A. Bugadov, P.F. Ermolov, E.A. Kushnirenko, V.I. Moskaev, J.E.T.P. 15, 824 (1962)
- I.11 R.M. Edelstein, W.F. Baker, J. Rainwater, Phys. Rev. 122, 252 (1961)
- I.12 J.O. Kessler, L.M. Lederman, Phys. Rev. 94, 689 (1954)
- I.13 T.A. Fujii, Phys. Rev. 113, 695 (1959)
- I.14 F. Binon et al. Nuclear Physics B17, 168 (1970)

Chapitre II

On trouvera un exposé extensif de la théorie des diffusions multiples et du potentiel optique dans les ouvrages et articles suivants :

- II.1 K.M. Watson, M.L. Goldberger, Collision Theory, John Wiley and Sons, New York (1964)
- II.2 K.M. Watson, Review of Modern Physics, 30, 565 (1958)
- II.3 A.K. Kerman, H. Mc Manus, R.M. Thaler, Annals of Physics 8, 551 (1959)

Chapitre III

Citons d'abord quelques analyses de la diffusion élastique π -noyau utilisant l'approximation de Born du potentiel optique ou un potentiel optique local

- III.1 R.K. Umerjee, Nuclear Phys. 60, 497 (1964)
- III.2 G. Ramachandran, K. Ananthanarayanan, Nucl. Phys. 64, 652 (1965)

III.3 G. Ramachandran, Nucl. Phys. 87, 107 (1966)

III.4 Eisenberg, Nucl. Phys. B3, 387 (1967)
Voir aussi I.9

Applications du modèle de Kisslinger

III.5 L.S. Kisslinger, Phys. Rev. 98, 761 (1955)

III.6 W.F. Baker, H. Byfield, J. Rainwater, Phys. Rev. 112, 1773 (1958)

III.7 E.H. Auerbach, D.M. Fleming, M.M. Sternheim, Phys. Rev. 162, 1683 (1967)

III.8 J. Beiner, P. Huguenin, Zamp 18, 912 (1967)

Voir aussi I.10

Pour l'analyse des données $\pi^- C_{12}$ au voisinage de la résonance on pourra consulter les articles suivants :

Modèle de Kisslinger

III.9 J. Gøerres, Thèse de Doctorat, Karlsruhe

III.10 E.H. Auerbach, M.M. Sternheim, Phys. Rev. Letters 25, 1500 (1970)

III.11 M. Krell, S. Barmo, Nucl. Phys. B20, 1, 1970

III.12 J.P. Maillet, C. Schmit, J.P. Dedonder, à paraître dans Lettere al Nuovo Cimento

Analyse en déphasage

III.13 J. Beiner, P. Huguenin, Helv. Phys. Acta. 43, 421 (1970)

Théorie de Glauber

III.14 R.J. Glauber, High Energy Physics and Nuclear Structure, North Holland ed. (1967)
page 311

III.15 Bjornenak, J. Finjord, P. Osland, A. Reitan, Nucl. Phys. B22, 179 (1970)

III.16 C. Schmit, Lettere al Nuovo Cimento, Vol. 4, 454 (1970)

III.17 C. Wilkin, Lettere al Nuovo Cimento, Vol. 4, 491 (1970)

Théorie de la diffusion multiple :

III.18 R. Seky, Phys. Rev. C, Vol. 3.2, 454 (1971)

Modèle optique

III.19 H.K. Lee, H. McManus, à paraître dans Nuclear Physics B

D.W.B.A.

III.20 A.G. Sitenko, I.S. Dotsenko, A.D. Foursat, on the fast π -meson scattering by nuclei, Preprint Kiev 1970

Enfin on pourra trouver dans les articles suivants des approches différentes au problème de l'interaction π -Noyau

Modèle Optique

- III.21 M. Ericson, T.E.O. Ericson, Annals of Physics 36, 323 (1966)
- III.22 C.B. Dover, J. Hufner, R.H. Lemmer, "Pions in nuclear matter - An approach to the pion-nucleus optical potentiel", Preprint IPNO/TH 191, (1970), à paraître dans Annals of Physics
- III.23 J.P. Dedonder, Thèse de 3ème Cycle, Orsay (1970)

Relations de dispersion

- III.24 T.E.O. Ericson, J. Formanek, M.P. Locher, Phys. Letters 26B, 91 (1967)
- III.25 T.E.O. Ericson, M.P. Locher, Phys. Letters 27B, 576 (1968)
- III.26 G. Fäldt, T.E.O. Ericson, Nucl. Phys. B10, 597 (1969)
- III.27 T.E.O. Ericson, M.P. Locher, Hadron-Nucleus Forward Dispersion Relations CERN 69-30

Chapitre VI

En ce qui concerne l'interaction π -nucleon libre, on pourra consulter :

- VI.1 G.F. Chew, F.E. Low, Phys. Rev. 101, 1571 (1956)
- VI.2 C. Lovelace, Phys. Rev. 135B, 1225 (1964)

Les corrections à l'approximation d'impulsion dans le cas de la diffusion π -Noyau sont abordés dans la référence II.1 et dans VI.3 Y. Kimura, Y. Nagashima, Progress of Theoretical Physics 33, 1 (1969)

Légende des figures

- Fig. G 1 Le module de la partie imaginaire de l'amplitude totale de diffusion est représenté par la ligne en trait plein.
Im Fn : Partie imaginaire de l'amplitude de diffusion n^{ème}.
- Fig. G 2 Distributions angulaires - La ligne en trait plein correspond aux résultats du modèle de Kisslinger, la ligne en tiret à ceux de la théorie de Glauber.
- Fig. G 3 Sections efficaces totales. La ligne en tiret représente les résultats de la théorie de Glauber, et les points ceux du modèle de Kisslinger.
- Fig. G 4 Partie réelle de l'amplitude de diffusion à 0° : la ligne continue représente les prédictions des relations de dispersion. Les résultats de la théorie de Glauber sont indiqués par des points.
- Fig. I. 1 à I. 7 Distributions angulaires. La courbe en pointillé correspond à l'approximation d'impulsion ; la correction A (resp B) est représentée par la ligne en tiret (resp. continue).
- Fig. I. 8 Sections efficaces totales - Idem -
- Fig. I. 9 Partie réelle de l'amplitude de diffusion à 0°. Les prédictions des relations de dispersion sont figurées par la ligne en pointillé. La ligne en tiret-point-tiret correspond à l'approximation d'impulsion. Les corrections (A) et (B) sont représentées par la ligne en tiret et la ligne continue.
- Fig. I. 10 à I. 16 Distributions angulaires : la ligne continue correspond à notre calcul en utilisant la correction (B) à l'approximation d'impulsion. La ligne en pointillé représente les résultats obtenus avec le modèle de Kisslinger.
- Fig. I. 17 Sections efficaces totales : Idem.
- Fig. II. 1 à II. 4 Champs locaux équivalents.
- Fig. II. 5 Diagramme d'Argand. Les chiffres correspondent aux diverses énergies : 1 à 120 Mev, 2 à 150 Mev,, 6 à 280 Mev d'énergie cinétique dans le laboratoire.
- Fig. III. 1 et III. 2 Distributions angulaires à 120 et 260 Mev.
Le résultat obtenu sans coulombien est représenté par la ligne continue.
La ligne en tiret correspond au calcul avec le coulombien.
- Fig. III. 3 et III. 4 Idem pour les sections efficaces totales et la partie réelle de l'amplitude à 0°.
- Fig. IV. 1 et IV. 2 Distributions angulaires à 120 et 150 Mev. La ligne continue correspond au calcul du potentiel optique au premier ordre, avec la correction (B). Les autres courbes correspondent au calcul avec le 2ème ordre du potentiel optique avec différentes approximations :
La courbe en tiret correspond à (1), calcul du 2ème ordre avec l'approximation statique (a) et la correction à l'approximation d'impulsion.
La courbe en tiret-point-tiret correspond à (2) , calcul du 2ème ordre avec l'approximation d'impulsion.
La courbe en pointillé correspond à (3), c'est à dire au calcul du 2ème ordre avec l'approximation statique habituelle (b).

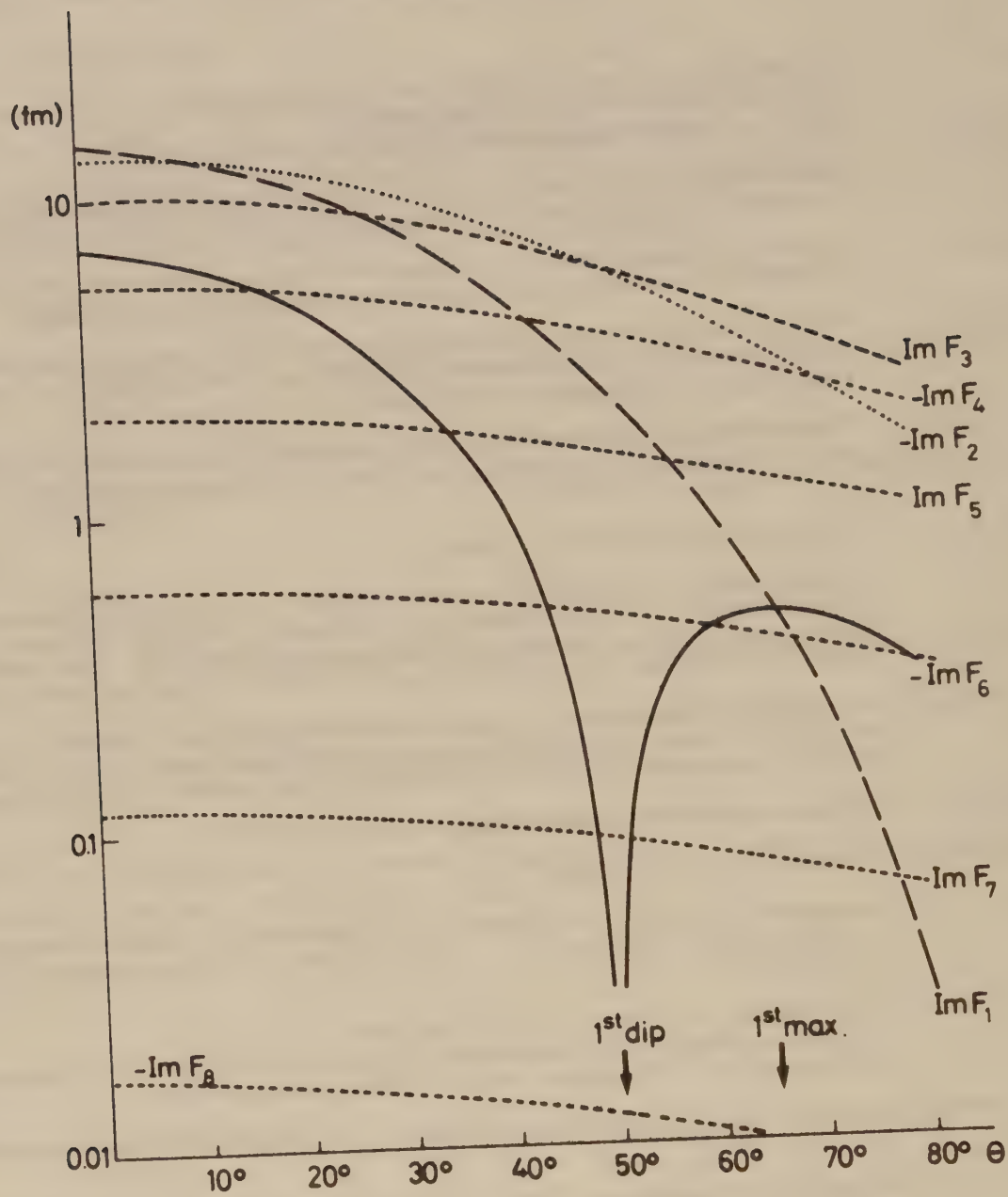


Fig. G 1

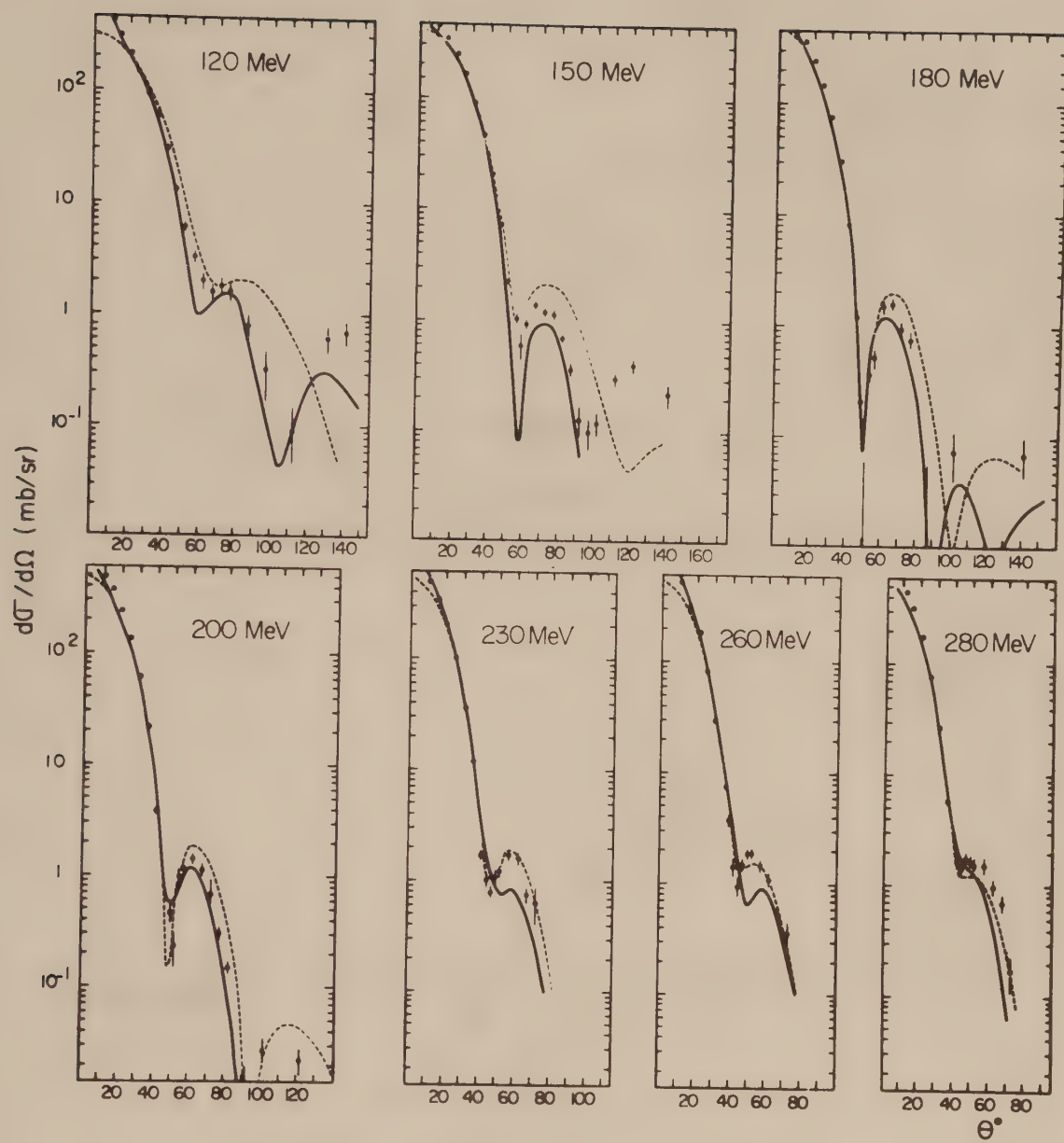


Fig. G 2

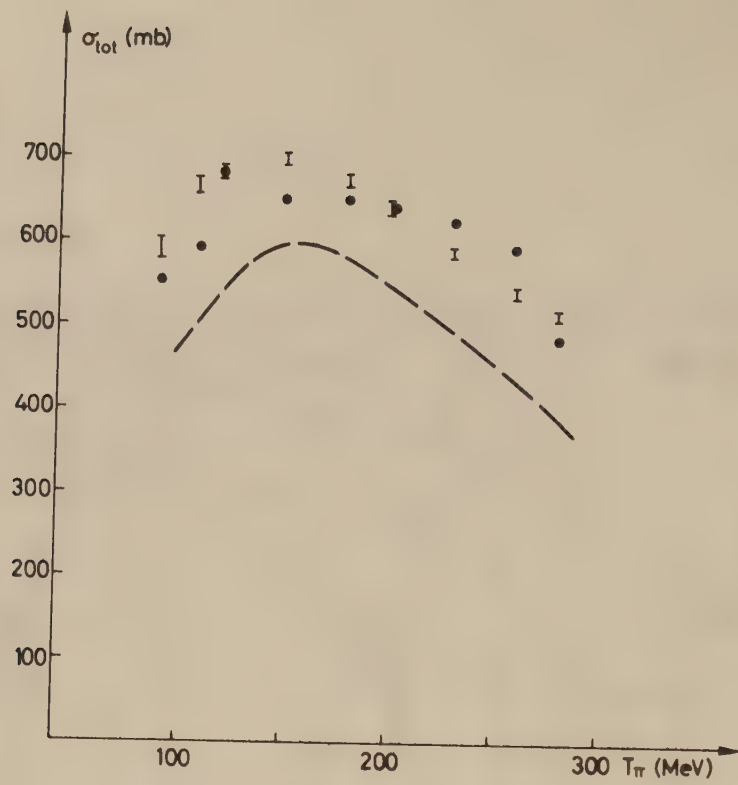


Fig. G. 3

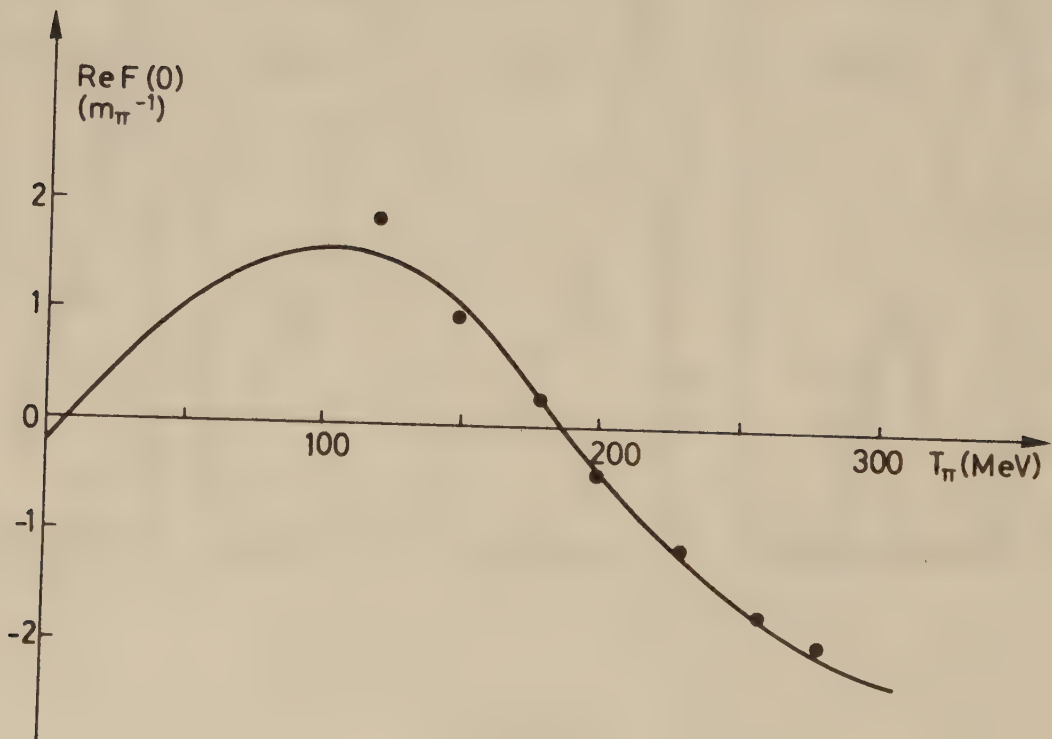


Fig. G 4

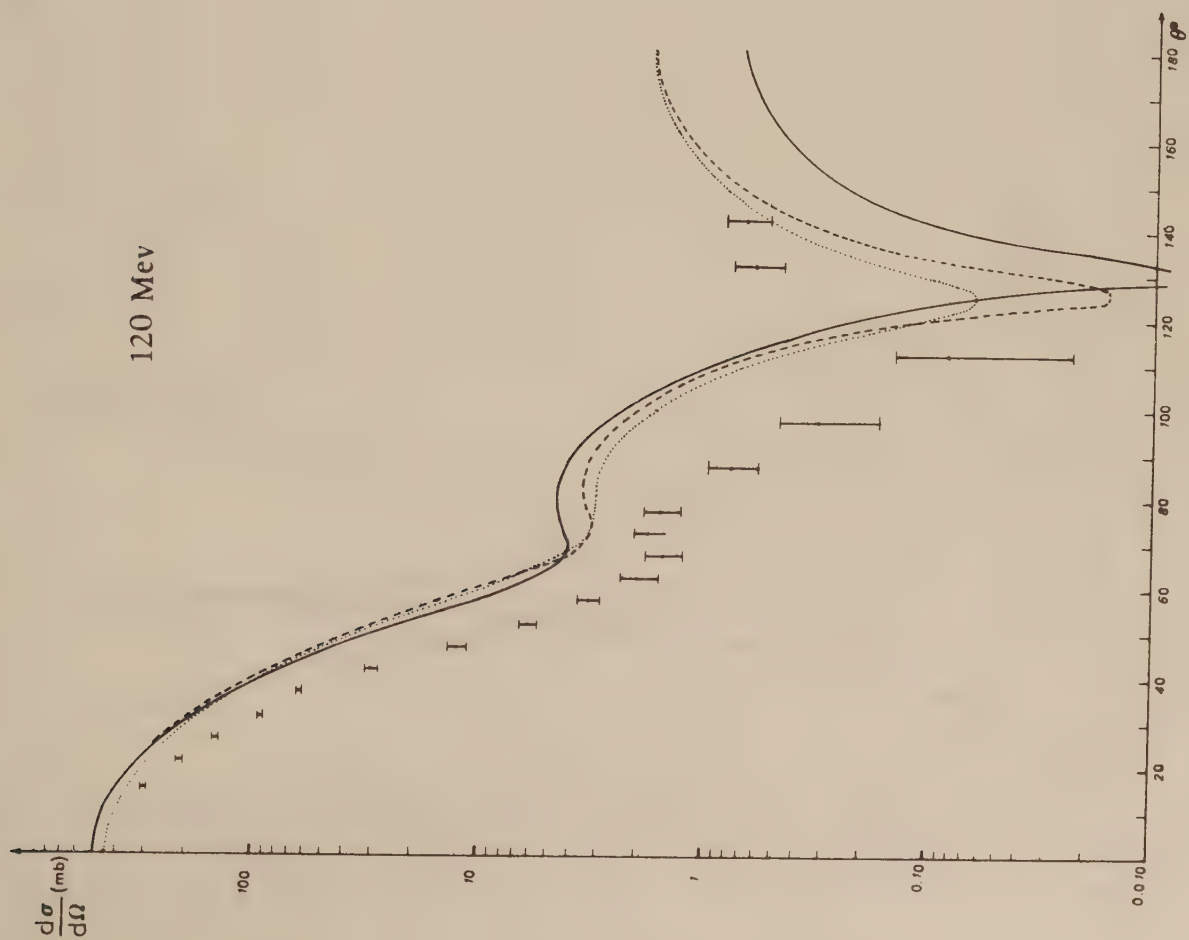


Fig. 1.1

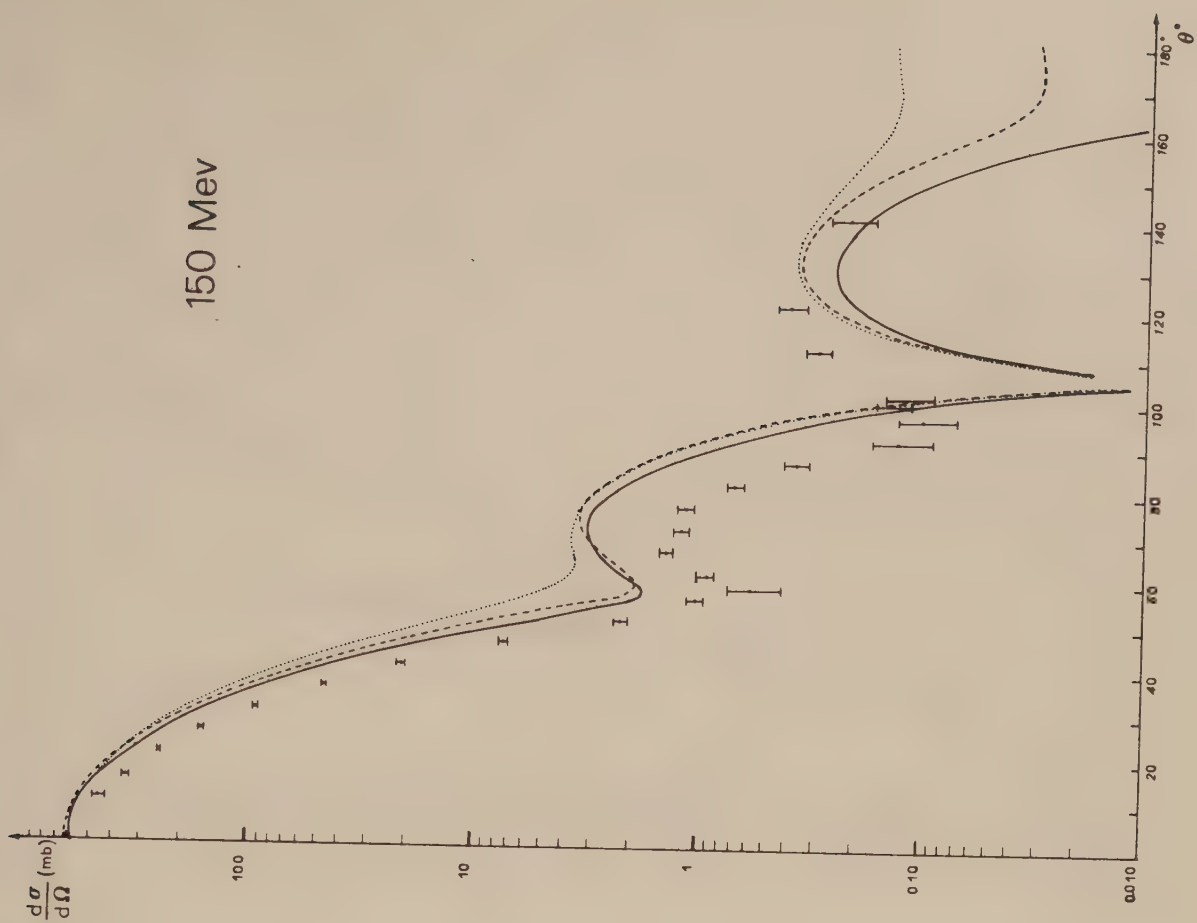


Fig. 1.2

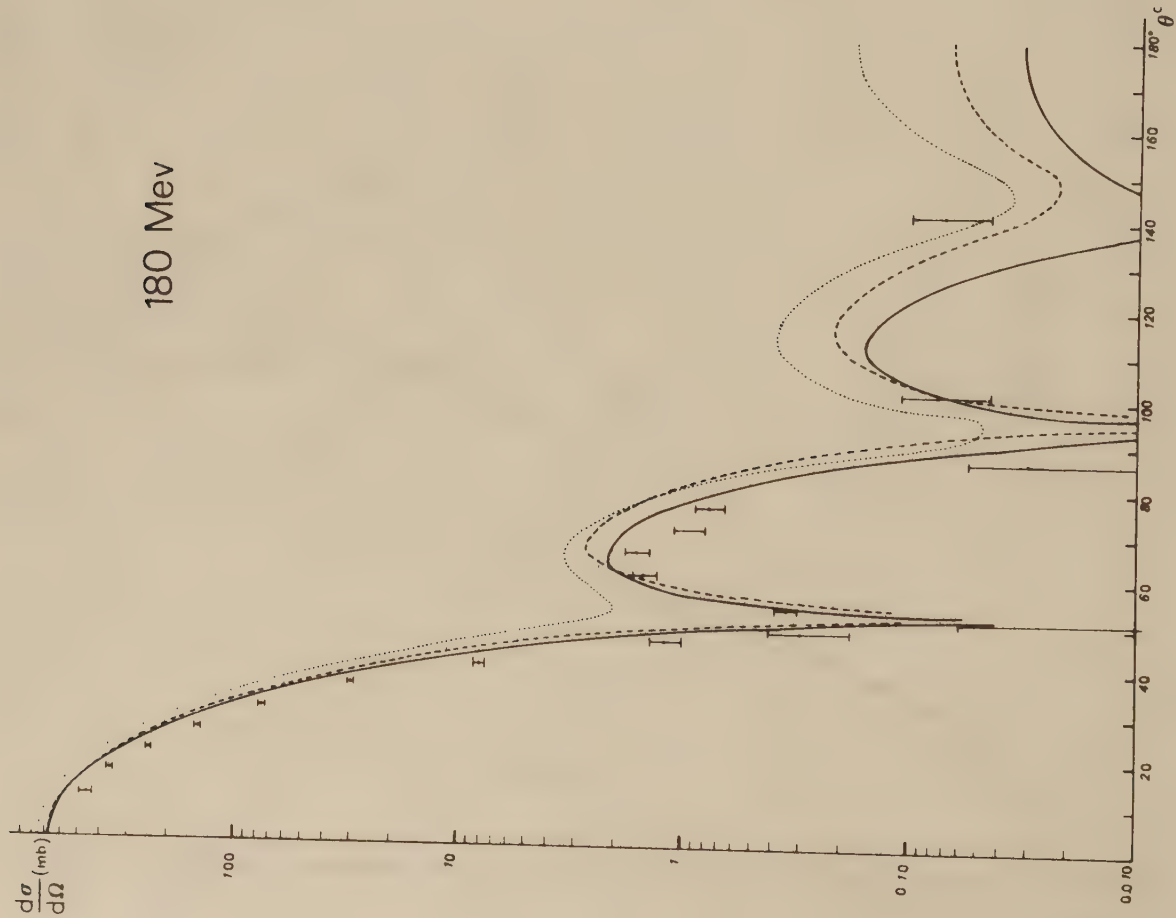


Fig. 1.3

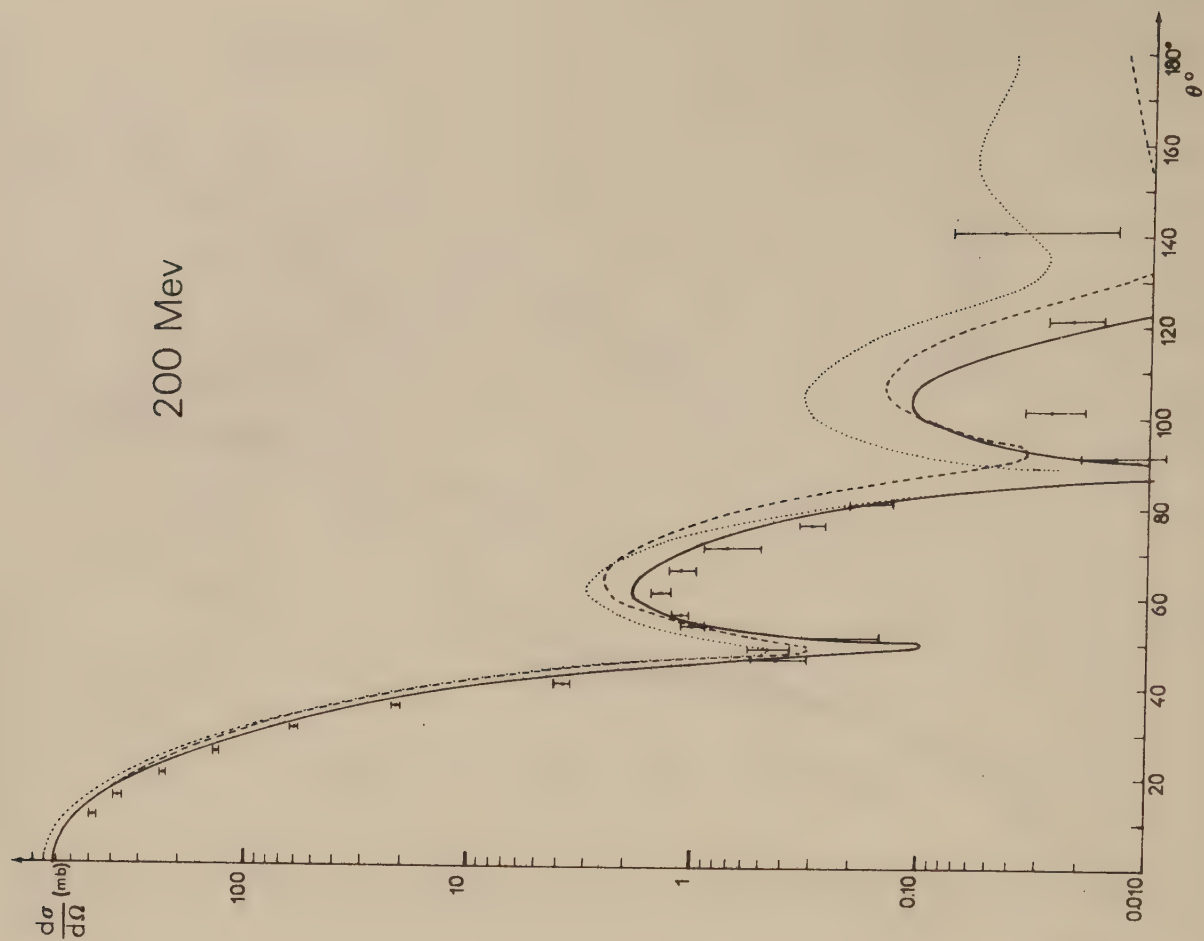


Fig. 1.4



Fig. 1.5

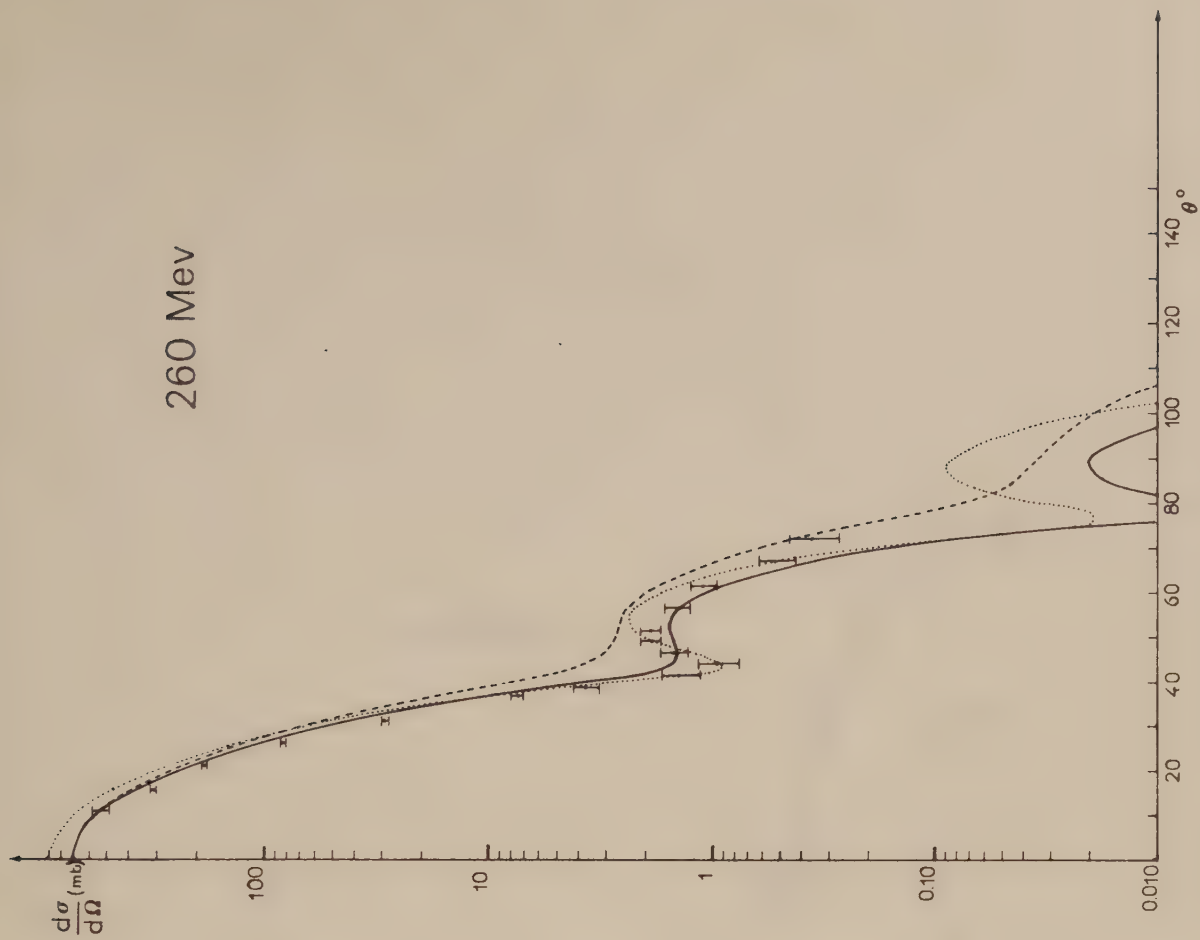


Fig. 1.6

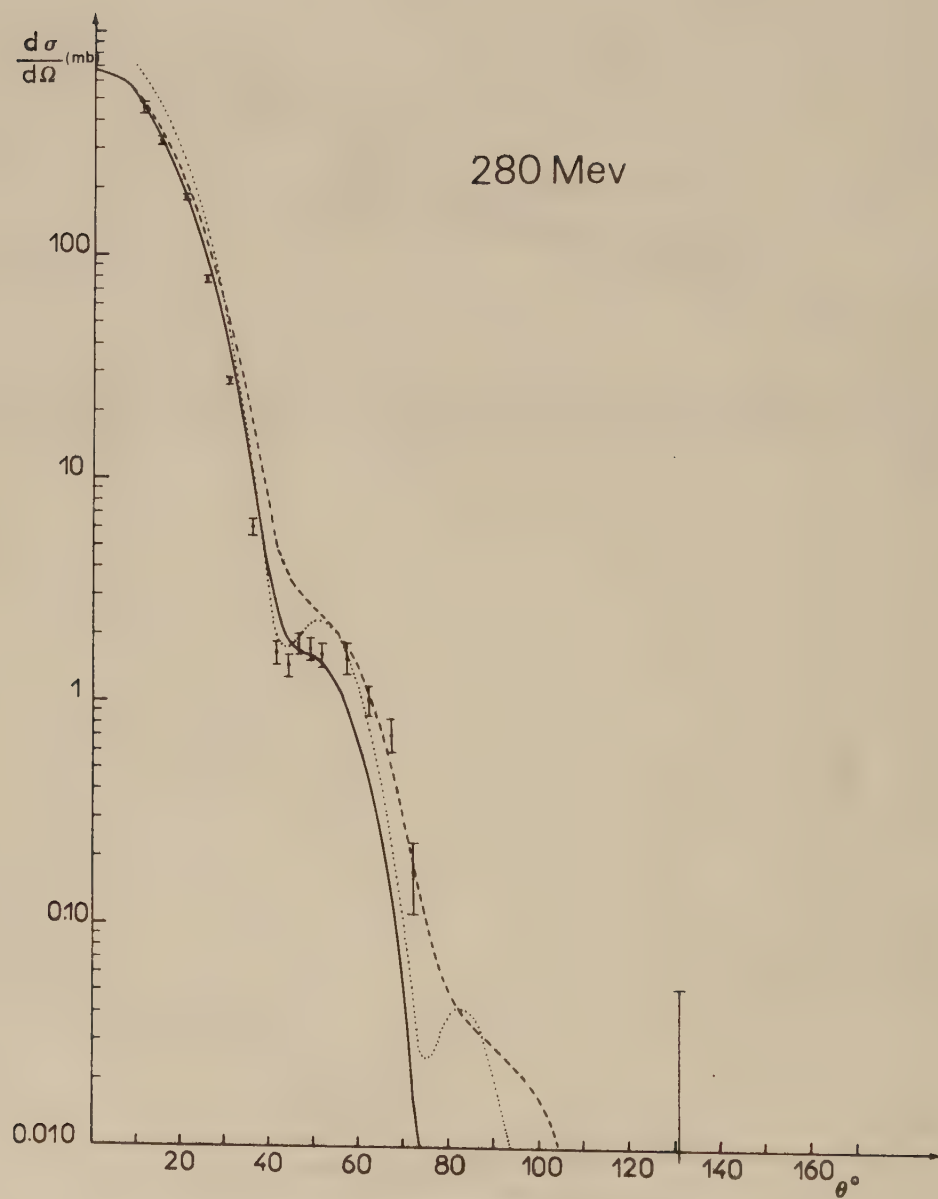


Fig. 1.7

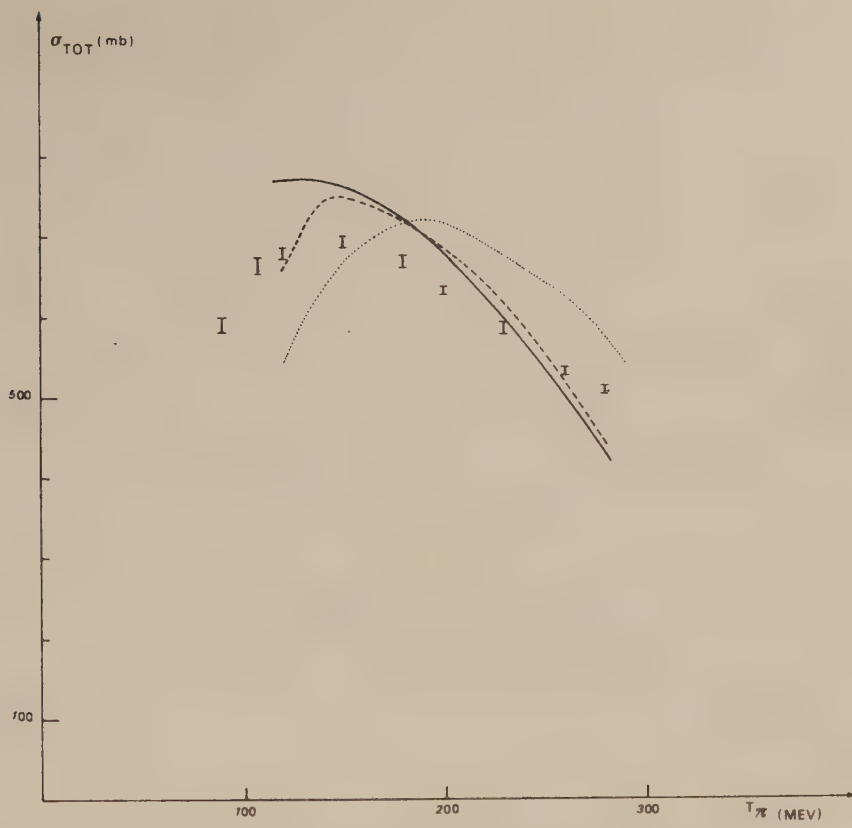


Fig. 1.8

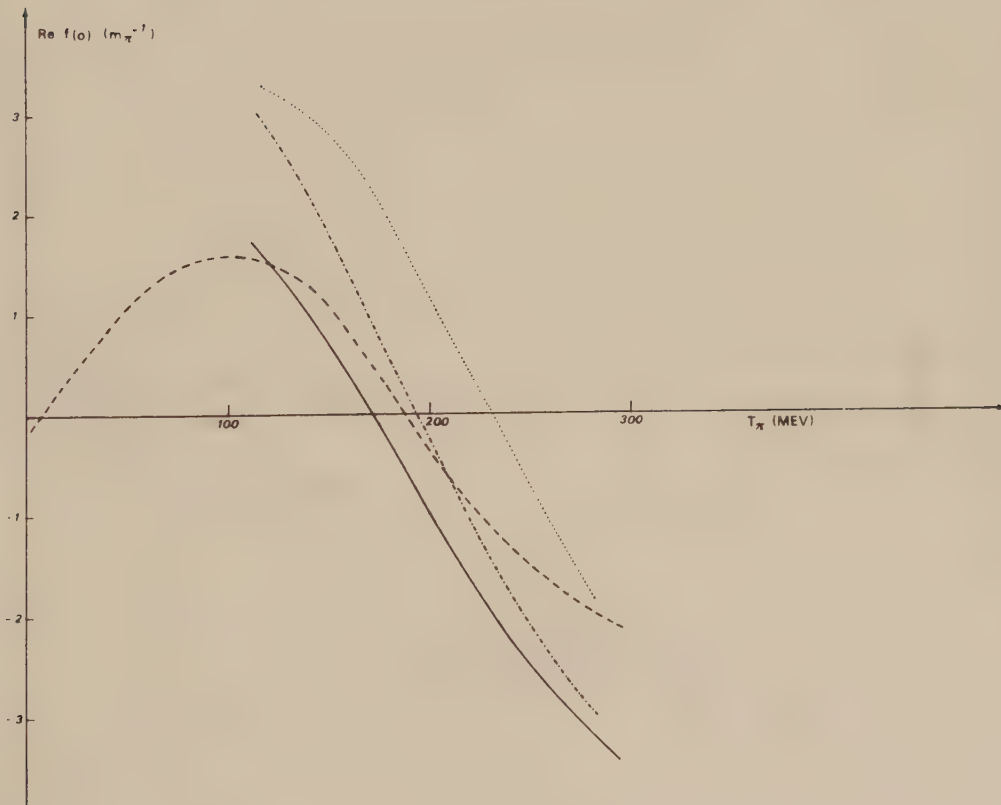


Fig. 1.9

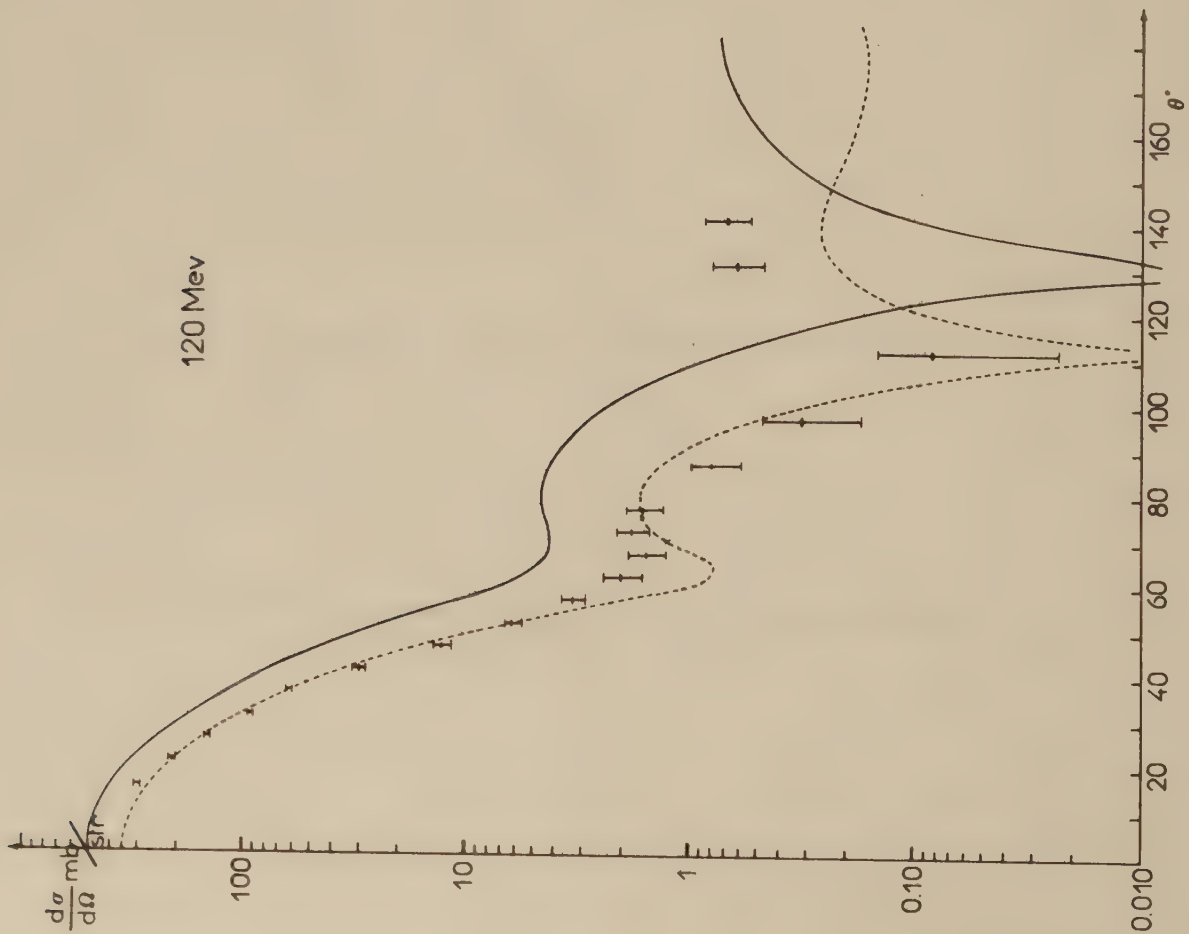


Fig. 1.10

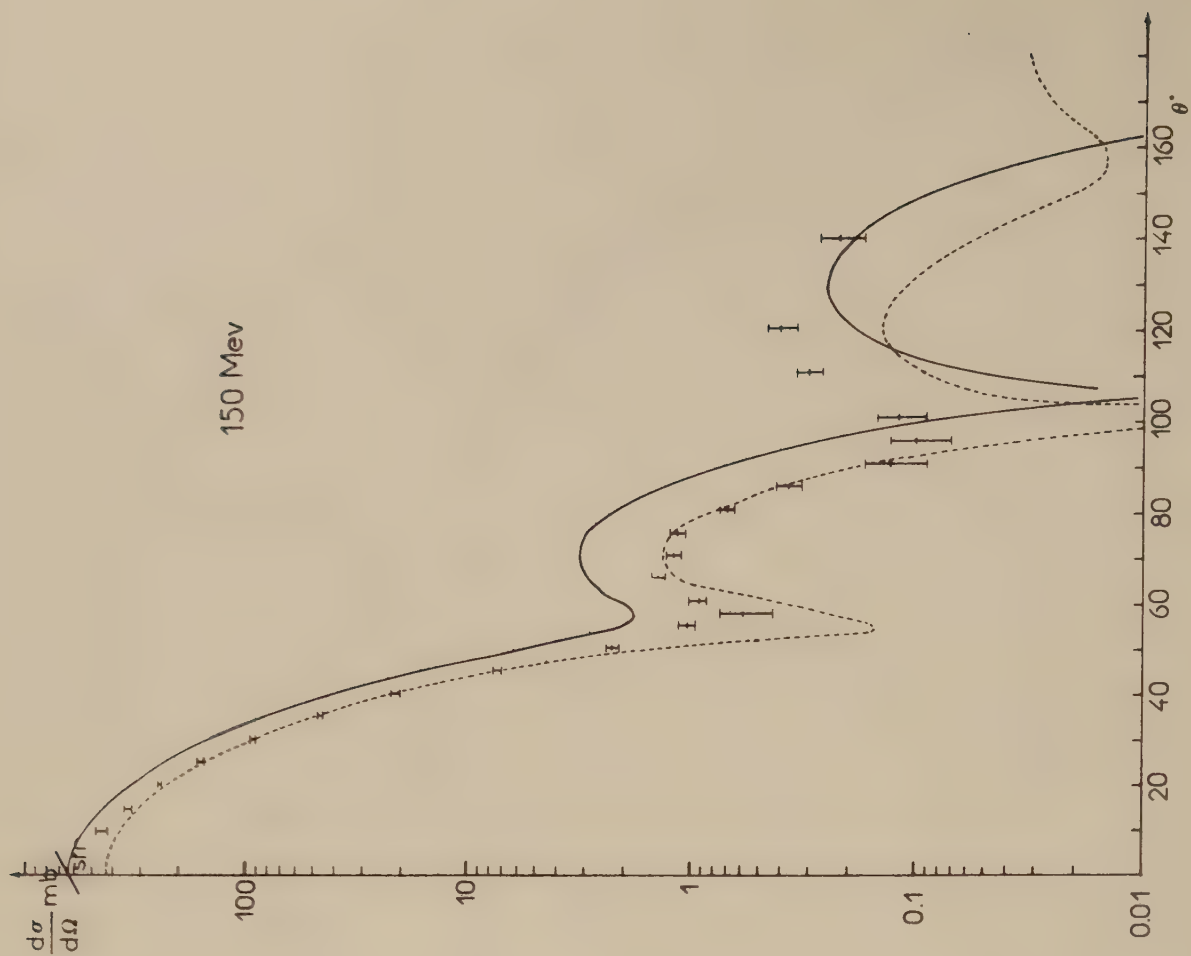


Fig. 1.11

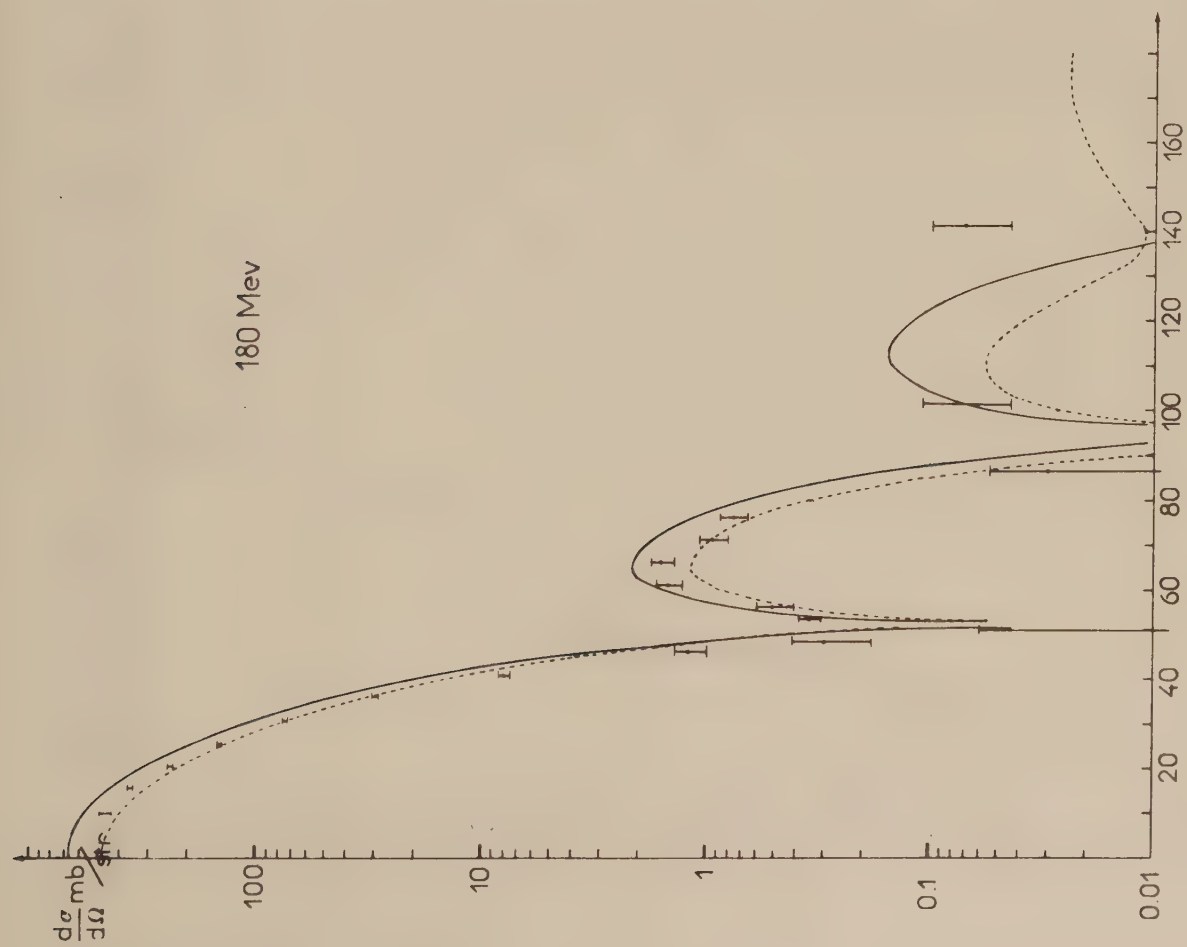


Fig. 1.12

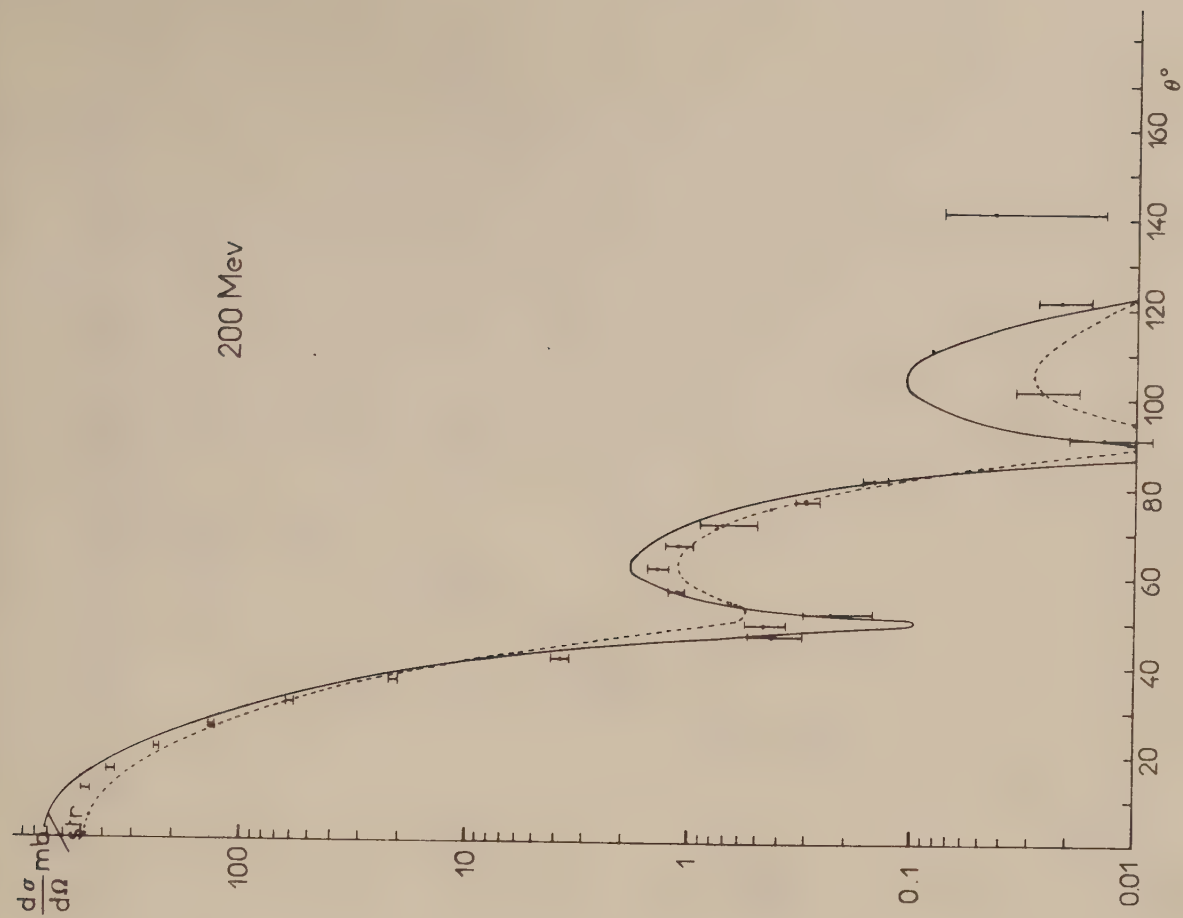


Fig. 1.13

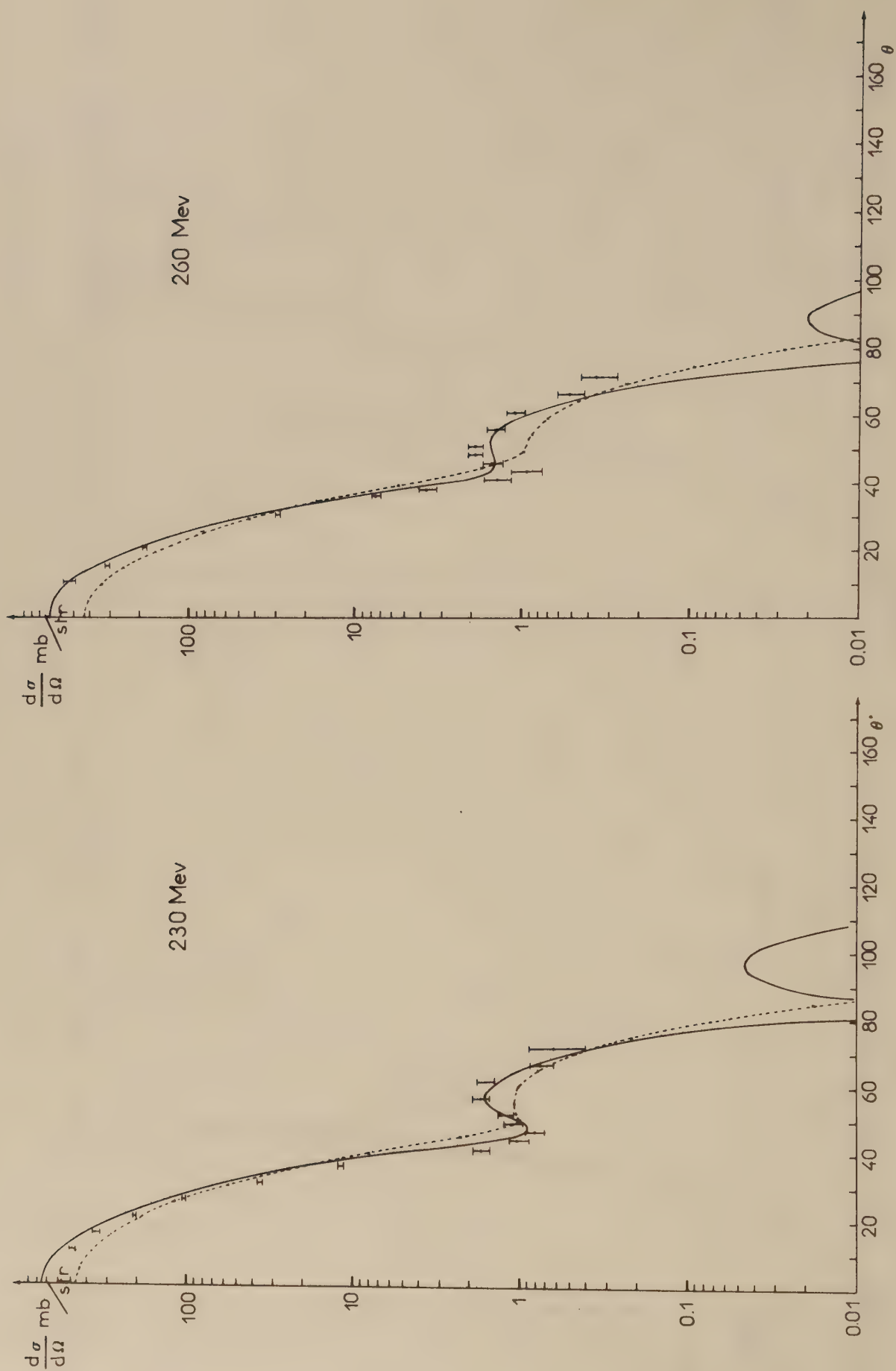


Fig. 1.14

Fig. 1.15

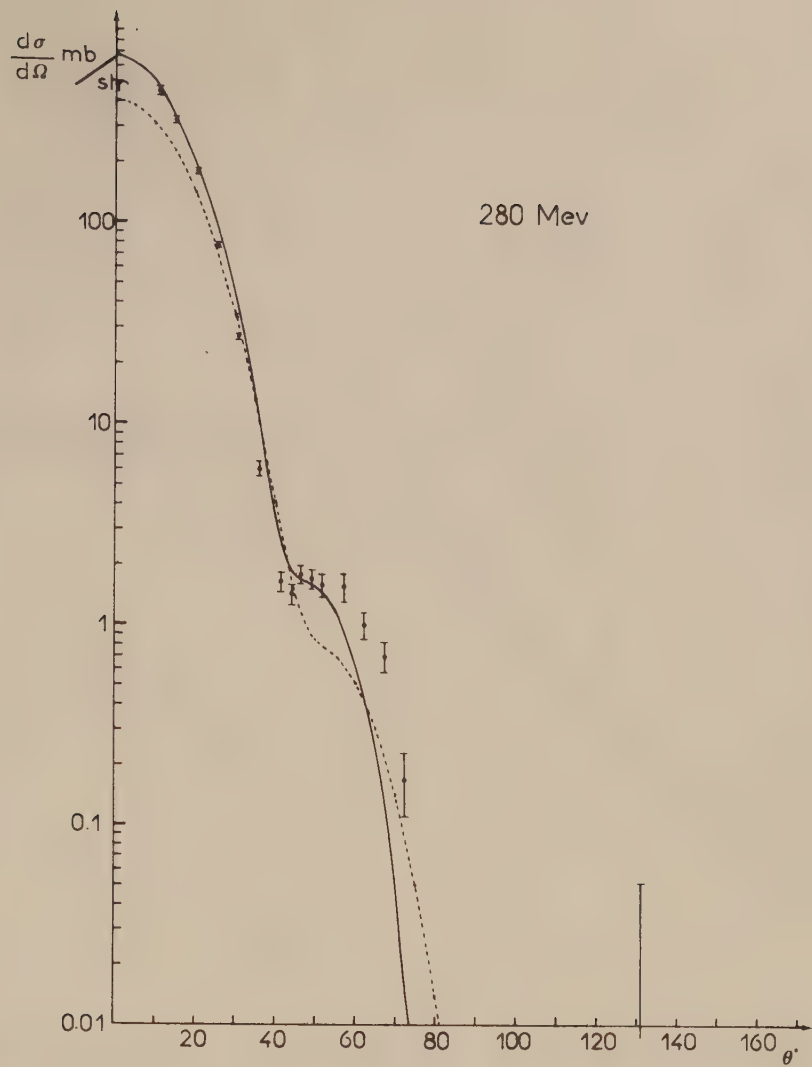


Fig. 1.16

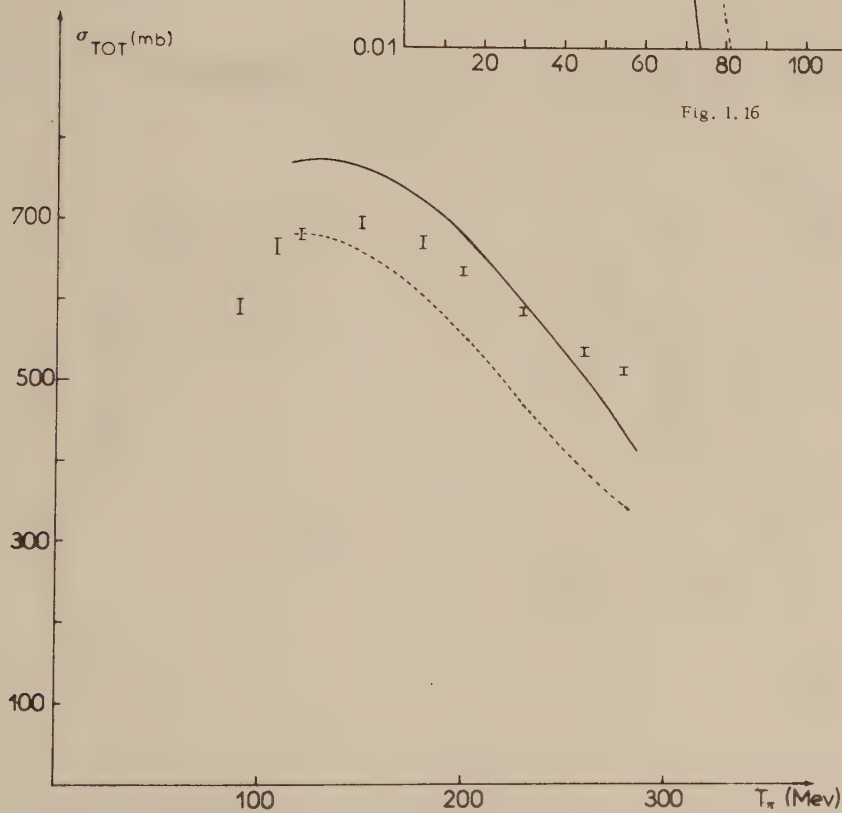


Fig. 1.17

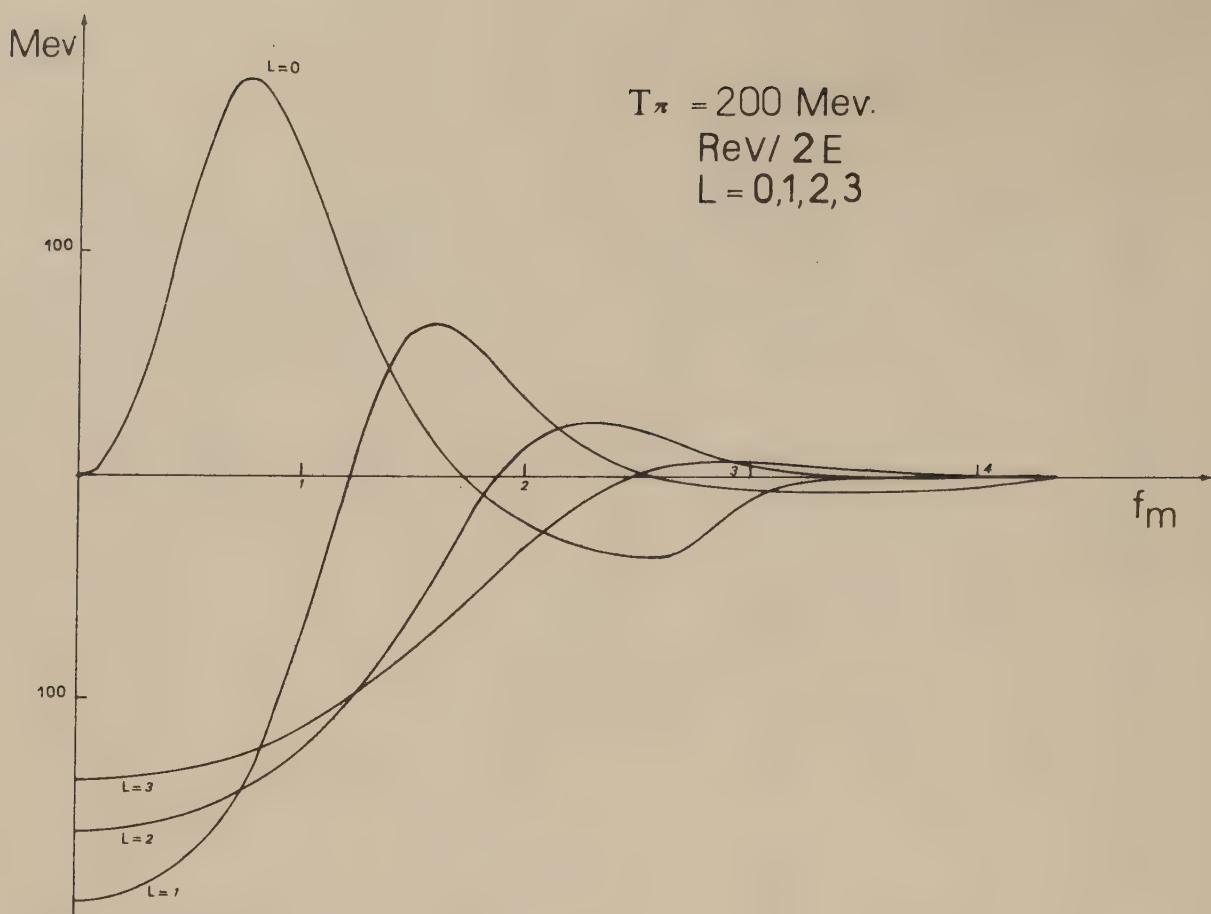


Fig. II.1

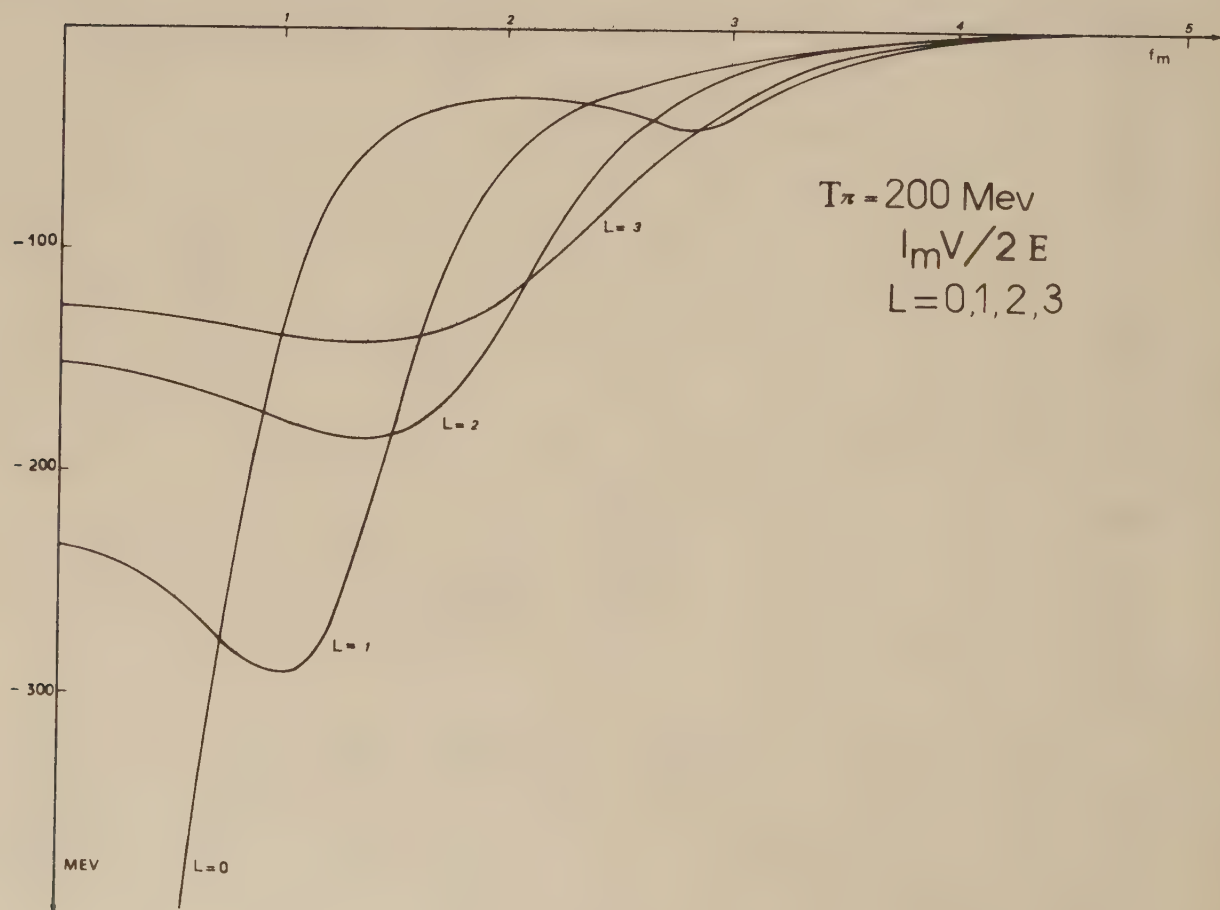


Fig. II.2

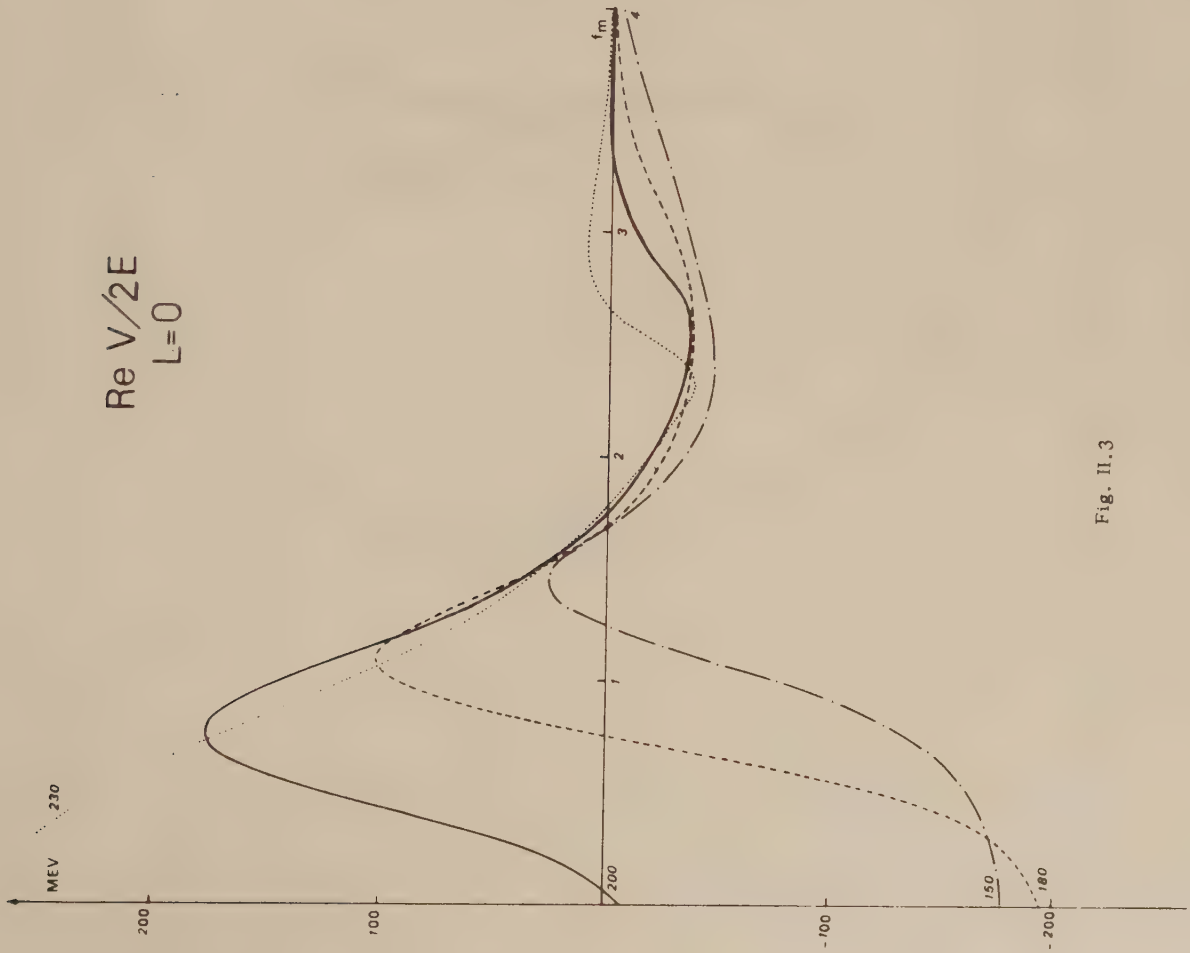


Fig. 11.3

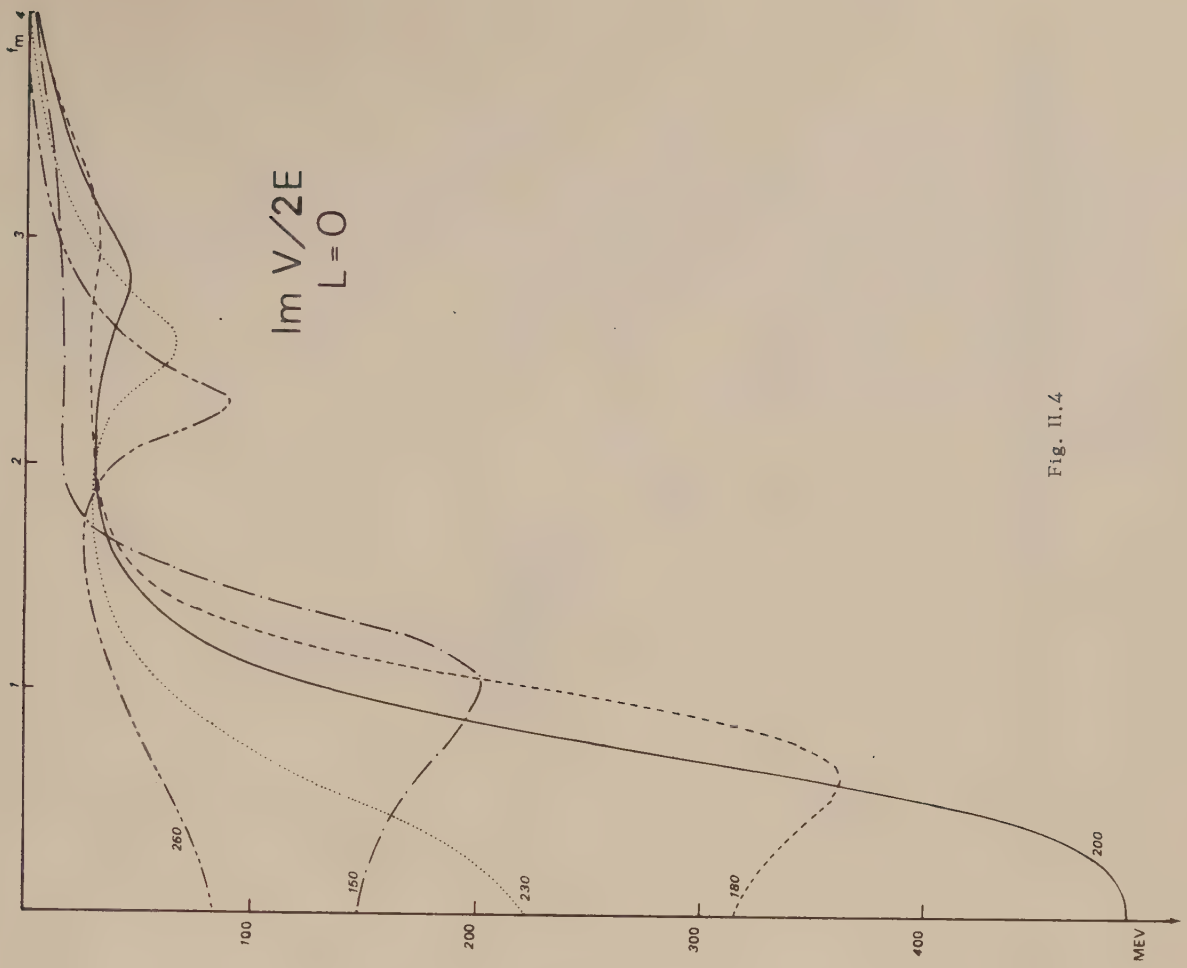


Fig. 11.4

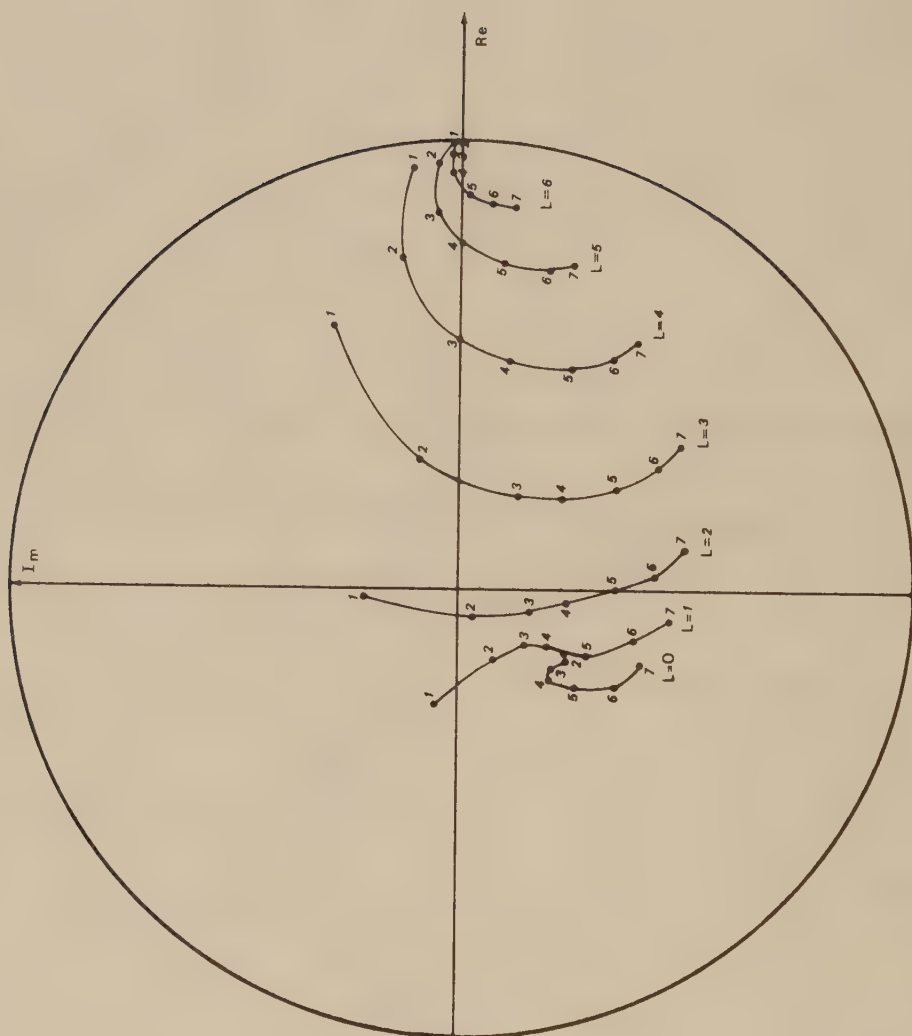


Fig. 11.5

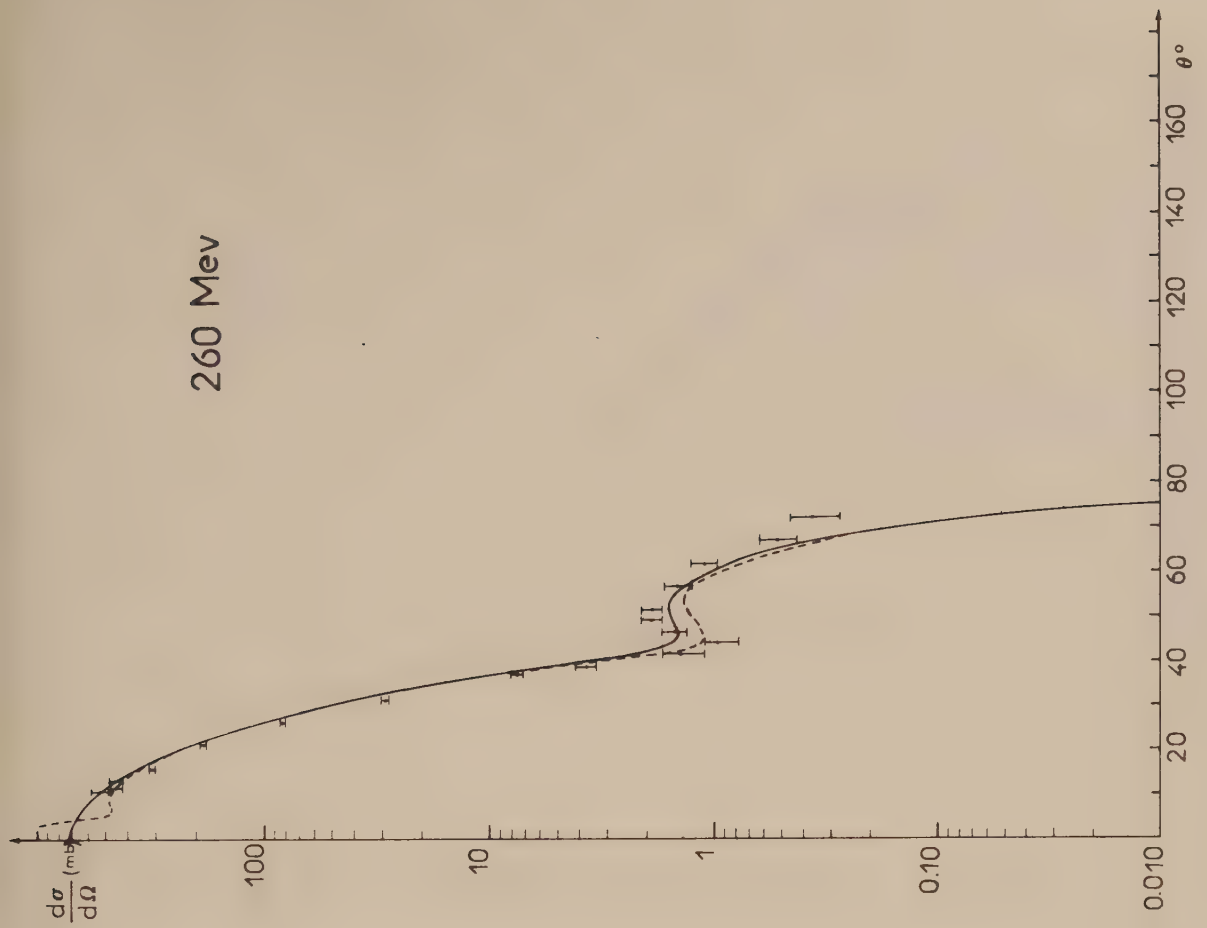


Fig. III.2

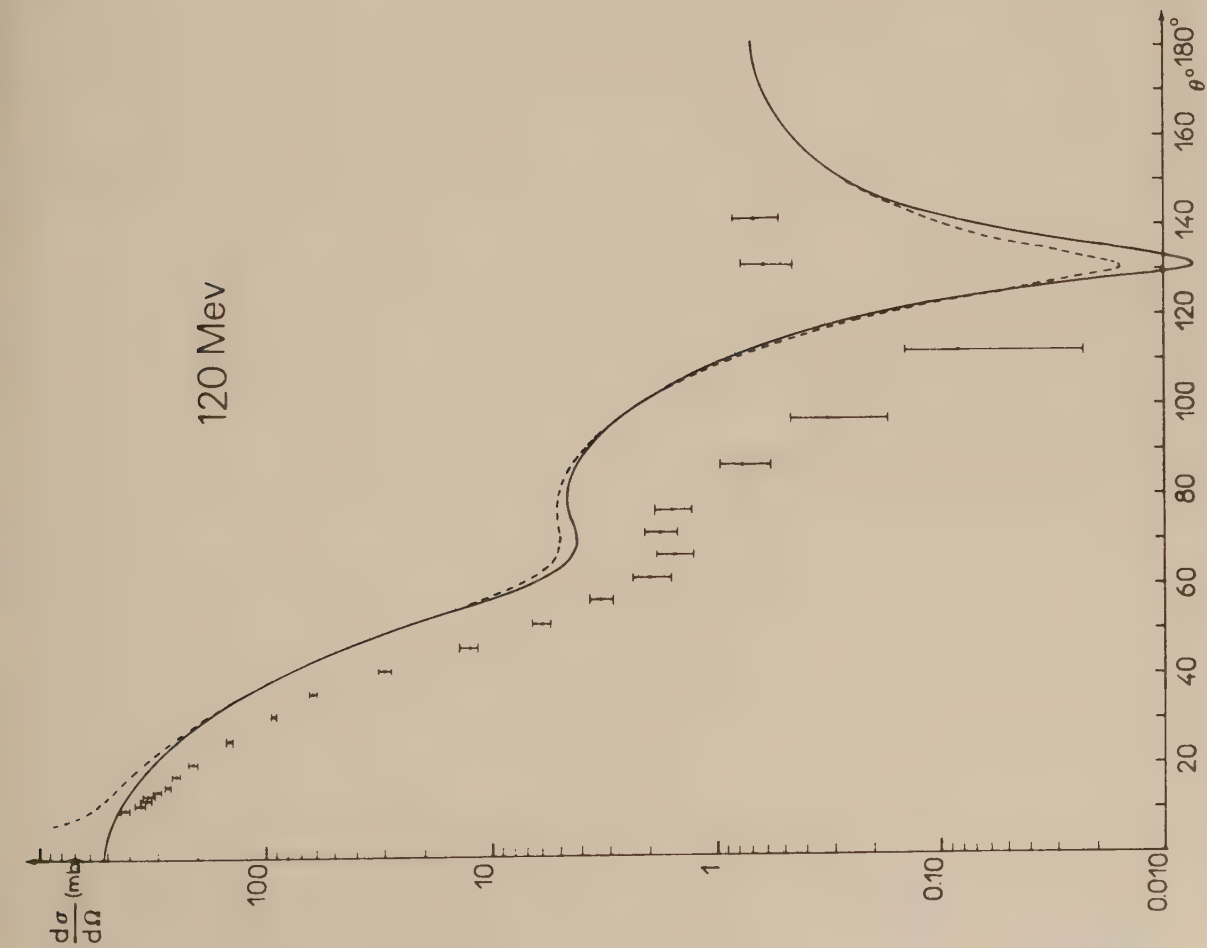


Fig. III.1

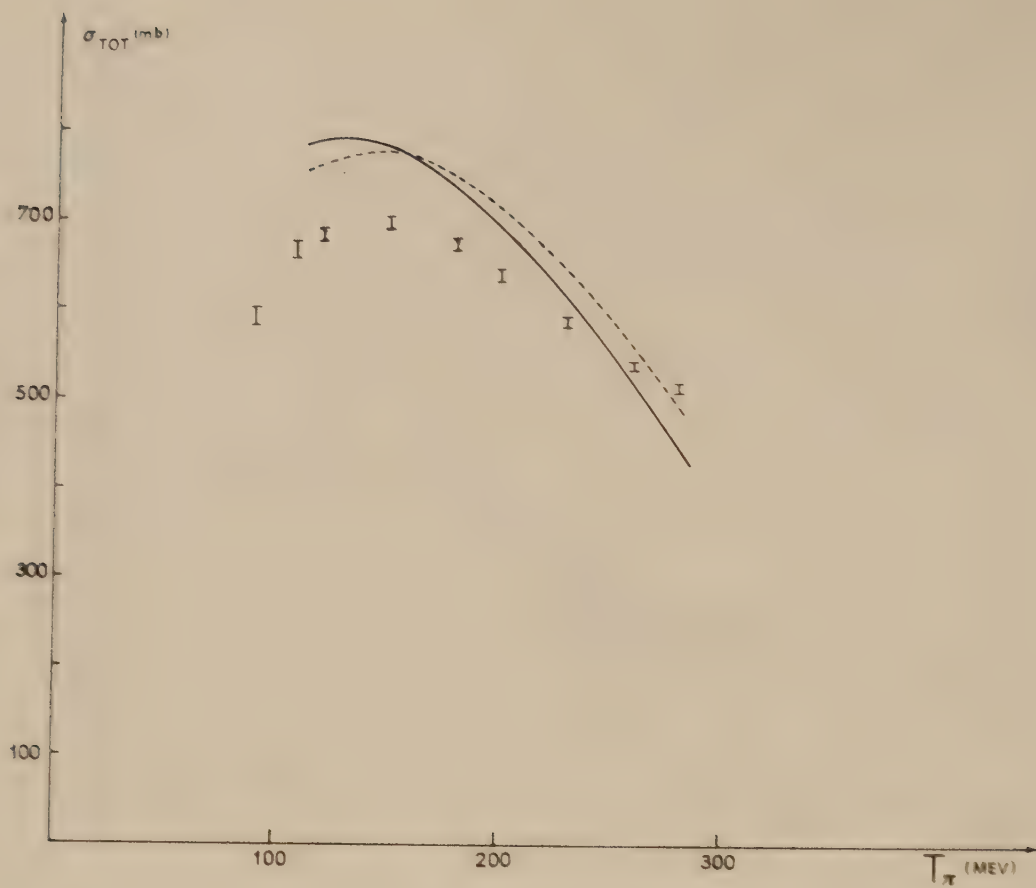


Fig. III.3

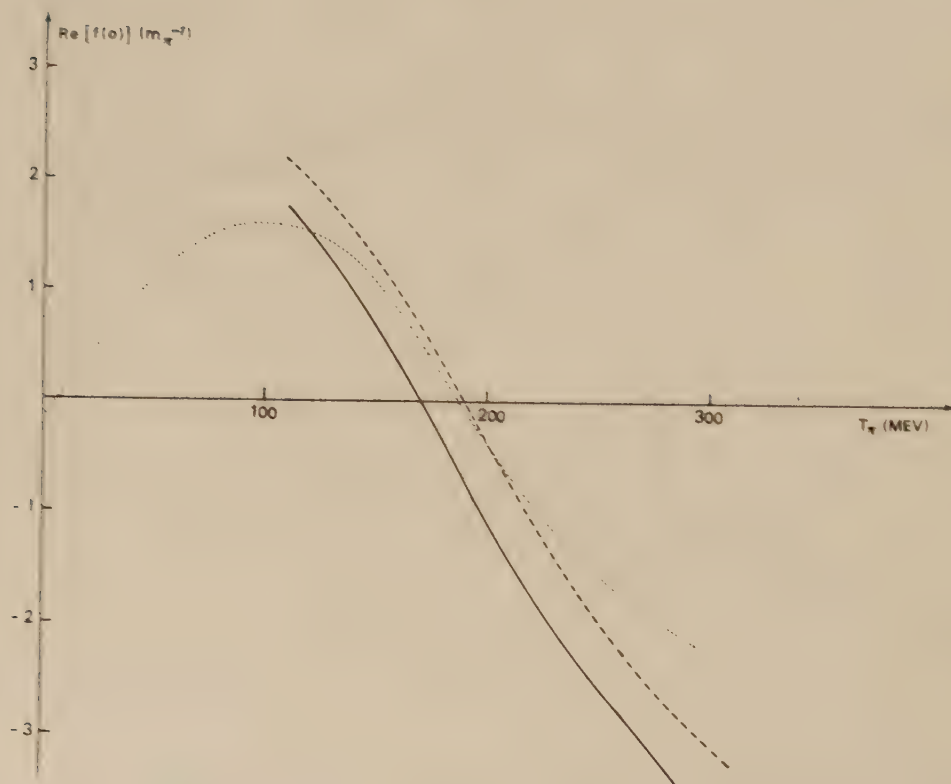


Fig. III.4

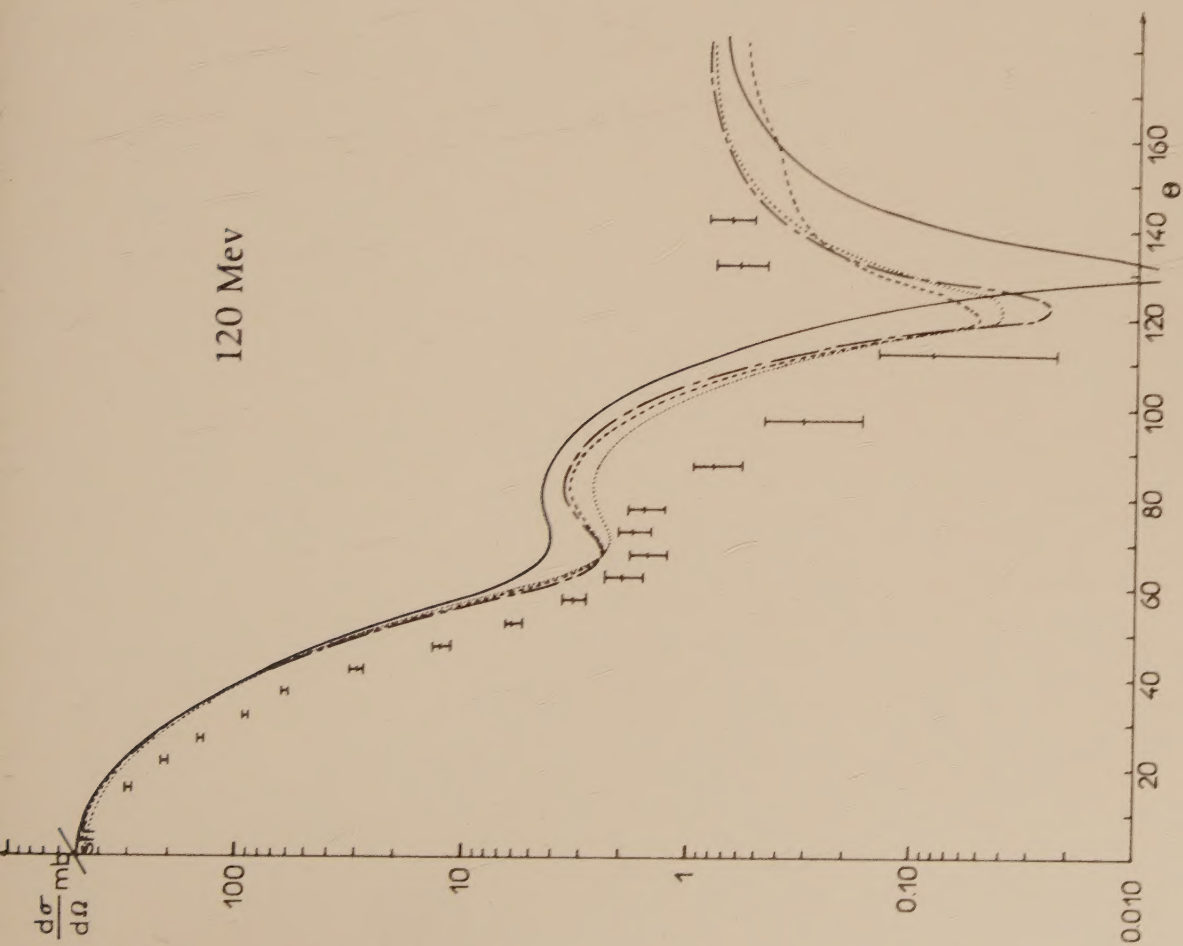


Fig. IV.1

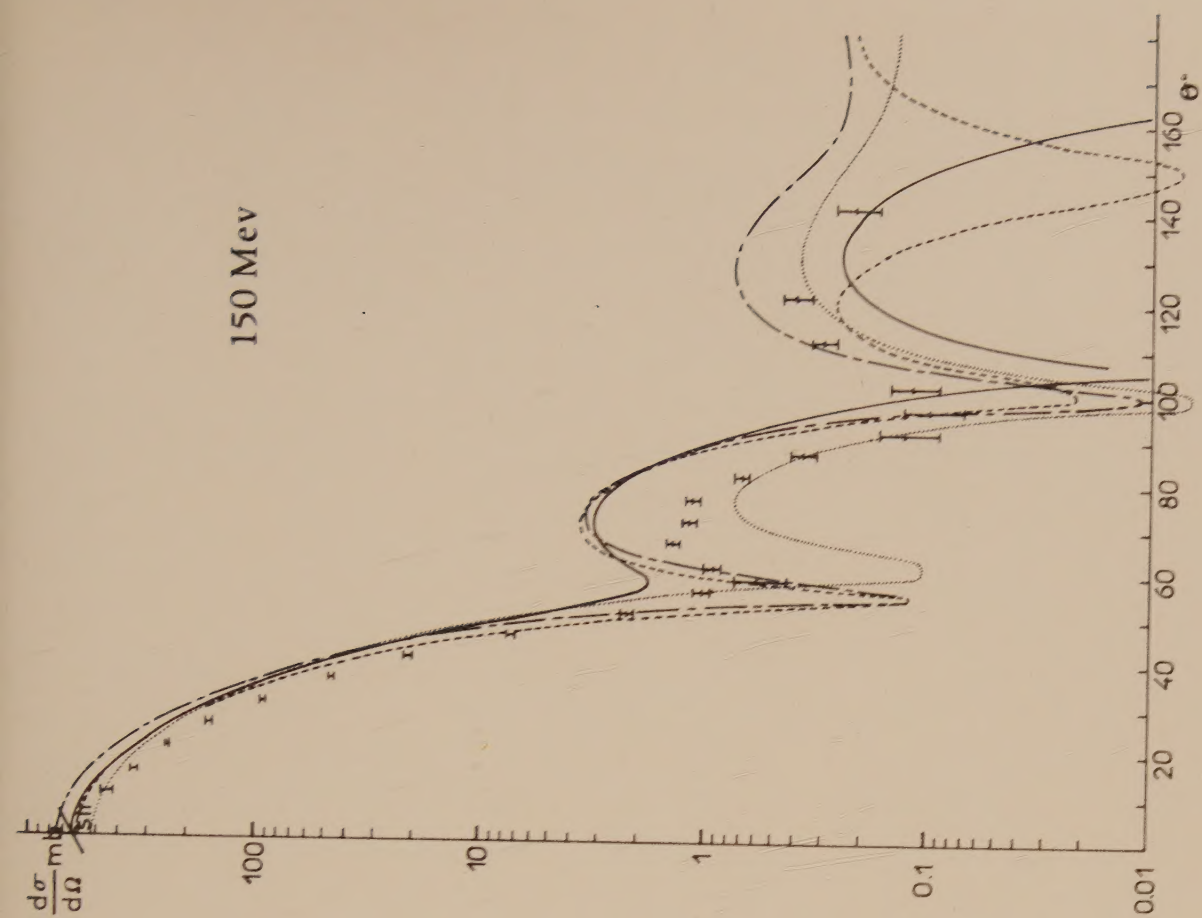


Fig. IV.2

